

необхідних для достатньо повної оцінки його ТС, за основу дослідження прийняти модель (4), тоді ця задача може бути розв'язана у результаті визначення величин:

$$q_i = \frac{d[d_i(t)]}{dt} = \frac{d[\Delta_b d_i(t)]}{dt} + \frac{d[\Delta_x d_i(t)]}{dt} + \frac{d[\Delta_s d_i(t)]}{dt}, \quad (8)$$

та їх використання при аналізі співвідношень залежності на множині Π .

ЛІТЕРАТУРА

1. Оре О. Графы и их применение / О. Оре. – М.: Мир, 1965. – 174 с.
2. Басакер Р. Конечные графы и сети / Р. Басакер, Т. Саати, М: Наука, 1974. – 220 с.
3. Берж К. Теория графов и ее применение / К. Берж. – М.: ИЛ, 1962. – 300 с.
4. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера / В.П. Сигорский. – К.: Техніка. 1975. – 800 с.
5. Харари Ф. Теория графов / Ф. Харари. – М.: Мир, 1973. – 365 с.
6. Белов В.В. Теория графов / В.В. Белов, Е.М. Воробьев, В.Е. Шаталов. – М.: Высшая школа, 1976. – 430 с.

УДК 621.873

В.С. ЛОВЕЙКІН, докт. техн. наук, Ю.О. РОМАСЕВИЧ, канд. техн. наук.
Національний університет біоресурсів і природокористування України, м. Київ

ОБҐРУНТУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ЗАКОНІВ КЕРУВАННЯ РУХОМ ДВОМАСОВИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Постановка проблеми. Велика кількість машин та механізмів може бути представлена двомасовими моделями [1, 2, 3]. Таке представлення необхідне для того, щоб провести динамічний аналіз руху цих машин, що дає змогу оцінити величину та характер зміни динамічних навантажень у їх ланках. Це, у свою чергу, дозволяє розрахувати елементи машини чи механізму за діючими навантаженнями.

Виникнення та еволюція динамічних навантажень пов'язана із структурою машини, її параметрами (коефіцієнти жорсткості та дисипації, маси та моменти інерції окремих елементів тощо) та зовнішніми впливами. Під зовнішніми впливами слід розуміти всі діючі на динамічну систему зусилля та моменти. Джерелами зовнішніх

впливів є зовнішнє (технологічне) середовище та приводні сили (моменти) від їх двигунів. Вибір раціональних шляхів зміни зовнішніх впливів від приводного механізму є актуальною задачею, оскільки дозволяє значно зменшити динамічні навантаження у елементах машини, що, у свою чергу, підвищує її надійність та довговічність.

Аналіз публікацій. Для зменшення динамічних вантажень у динамічних двомасових системах природно використати потужний математичний апарат оптимального керування [4, 5, 6, 7, 8, 9]. Такий підхід є науково обґрунтованим, оскільки дозволяє оптимально, найвигідніше із деяких позицій, синтезувати режим руху системи. Якщо критерій оптимальності відображає динамічні показники руху системи, то при цьому її рух відбувається із якнайменшими динамічними навантаженнями. Однак, для проведення процедури оптимізації необхідно мати детерміновану математичну модель системи. Це вимагає параметричної ідентифікації об'єкта дослідження (машини чи механізму) із наступним дослідженням адекватності математичної моделі [10, 11]. Звичайно, такі дослідження не можуть бути проведені для всіх машин, оскільки вимагають значних ресурсів та часу. Крім того, навіть незначне конструктивне вдосконалення машини змінює параметри моделі, яка їй відповідає. У практичних розрахунках можна лише приблизно оцінити параметри моделі, тобто встановити деякий інтервал, в який величини параметрів входять із заданою вірогідністю.

Зазначимо, що відомі розрахунки [12], які подібні приведеним у даному дослідженні. Однак, на відміну від роботи [12] у даній роботі використовуються суто „кінематичне” завдання зовнішнього збурення, тобто задається швидкість веденої маси (у роботі [12] зовнішнім збуренням виступає момент прикладений до ведучого колеса).

Постановка мети та задач. Метою приведеного дослідження є вибір раціональних режимів руху машин із невизначеними (або визначеними лише у деякому інтервалі) параметрами. Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі завдання: 1) побудувати динамічну та математичну моделі руху динамічної двомасової системи; 2) встановити раціональні способи розгону динамічної системи, які можна реалізувати за допомогою частотно-керованого асинхронного приводу; 3) знайти динамічні та кінематичні показники, які відповідають прийнятним раціональним способам розгону системи; 4) проаналізувати отримані результати та вказати шляхи подальших досліджень.

Основна частина. Для досліджень приймемо динамічну модель, яка показана на рис. 1.

Прийнята динамічна модель описується такою системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c(x_1 - x_2) = F - F_0; \\ m_2 \ddot{x}_2 = c(x_1 - x_2), \end{cases} \quad (1)$$

де m_1 – ведуча маса; m_2 – ведена маса; x_1, x_2 – координати центрів відповідних мас, F – приводне (тягове або гальмівне) зусилля, що діє на ведучу масу; F_0 – сила опору переміщенню, що діє на ведену масу, c – жорсткість зв’язку, який поєднує ведену і ведучу маси. Якщо прийняти, що $c = \frac{m_2 g}{l}$ (тут m_2 - маса вантажу, g - прискорення вільного падіння, l - довжина гнучкого підвісу на якому закріплена маса вантажу), то приведена на рис. 1. схема описує рух математичного рухомого маятника [13].

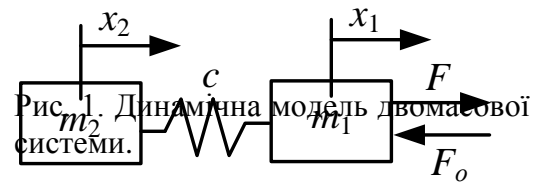


Рис. 1. Динамічна модель двомасової системи.

Друге рівняння системи рівнянь (1) можна подати у такому вигляді:

$$x_1 = x_2 + \Omega_0^{-2} \ddot{x}_2, \quad (2)$$

де Ω_0 - частота власних коливань динамічної системи ($\Omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m_2}}$).

Проаналізуємо, які способи задання режимів розгону можуть реалізувати сучасні частотно-керовані асинхронні електроприводи [14-16]. Прийmemo для подальших досліджень такі основні (базові) закони зміни швидкості (рис. 2.).

Приведені на рисунку 2 закони зміни швидкості веденої маси при розгоні динамічної системи описуються такими функціями:

$$\dot{x}_1 = \frac{t}{T} v - ; \quad (3)$$

для лінійного закону,

$$\dot{x}_1 = \frac{t}{T^2} v(2T - t) - \quad (4)$$

для U-подібного закону,

$$\dot{x}_1 = \frac{t^2}{T^3} v(3T - 2t); - \quad (5)$$

для S – подібного закону;

$$\dot{x}_1 = \begin{cases} \frac{t^2}{T_1^3} v_1(3T_1 - 2t), \text{ ідè } t \in [0, T_1]; \\ \frac{(2t - 2T_1 + T)(T_1 + T - t)^2 v_1 - (t - T_1)^2 (2t - 2T_1 - 3T)v}{T^3}, \text{ ідè } t \in [T_1, T], \end{cases} \quad (6)$$

де T – тривалість процесу розгону до швидкості v ; T_1 – тривалість розгону до швидкості v_1 ; v – усталена швидкість руху ведучої маси; v_1 – „проміжна” швидкість руху ведучої маси; t – час.

Необхідно зробити таке зауваження: у даному дослідженні прийнято припущення щодо „ідеальності” відпрацювання швидкості веденої маси. У першому наближенні таке припущення можна використовувати. Для більш точного аналізу динаміки руху динамічної системи це припущення потребує обґрунтування.

Сучасні частотно-керовані приводи дозволяють достатньо точно відпрацьовувати задання швидкості, однак якщо для динамічної системи справедлива нерівність $m_2 \gg m_1$ і динамічні характеристики приводу невисокі, то відпрацювання законів швидкості приведених на рис. 2 може мати певні похибки. У цьому разі результати даного дослідження для таких динамічних систем використовувати не можна.

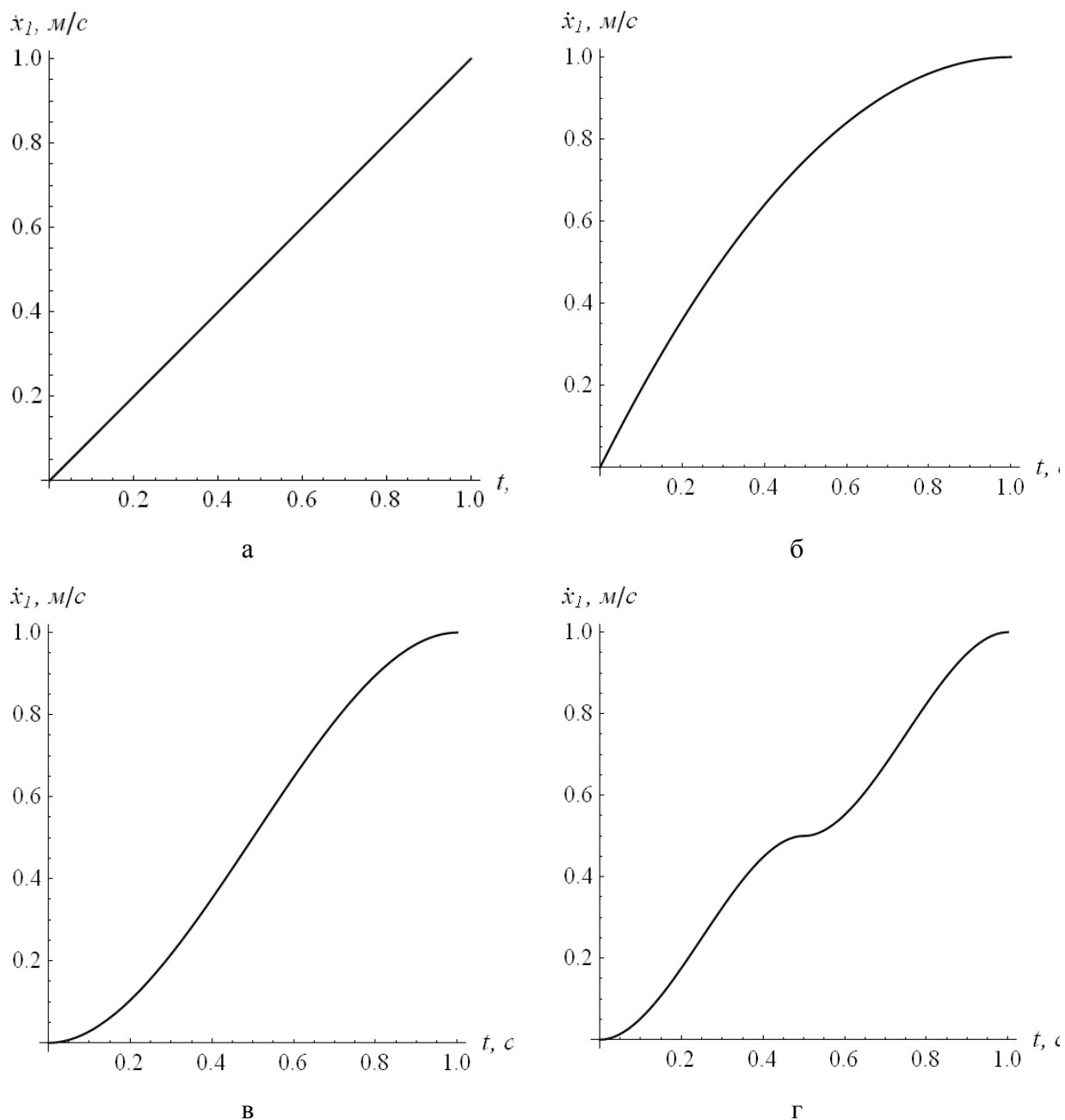


Рис. 2. Базові закони зміни швидкості ведучої маси при її розгоні: а – лінійний; б –

U-подібний; в – S – подібний; г – подвійний S – подібний.

Оцінку „раціональності” того чи іншого закону руху динамічної системи будемо виконувати за показником питомої енергії залишкових коливань веденої маси, яка визначається таким чином:

$$\tilde{A}(T) = \frac{\dot{A}_{\text{еґ}}(T) + \dot{A}_{\text{іі}}(T)}{\dot{A}_{\text{еґ.оіі.}m_2}}, \quad (7)$$

де $\dot{A}_{\text{еґ}}(T)$ - кінетична енергія коливань маси m_2 в момент часу T ; $\dot{A}_{\text{іі}}(T)$ - потенціальна енергія запасена в пружному елементі c в момент часу T ; $\dot{A}_{\text{еґ.оіі.}m_2}$ - кінетична енергія руху маси m_2 при її усталеній швидкості v . Вирази для $\dot{A}_{\text{еґ}}(T)$, $\dot{A}_{\text{іі}}(T)$ та $\dot{A}_{\text{еґ.оіі.}m_2}$ мають такий вигляд:

$$E_{\text{кін}}(T) = \frac{m_2(v - \dot{x}_2(T))^2}{2}; \quad (8)$$

$$E_{\text{ном}}(T) = \frac{c(x_1(T) - x_2(T))^2}{2}; \quad (9)$$

$$\dot{A}_{\text{еґ.оіі.}m_2} = \frac{m_2 v^2}{2}. \quad (10)$$

Пояснимо вибір показника (7) для оцінки якості того чи іншого закону руху динамічної системи. Величину залишкових коливань необхідно оцінювати за їх енергією або положенням зображуючої точки у фазовому просторі. Перший показник дає змогу оцінити кількісну картину коливань а другий – якісну. Оскільки якісна картина нас не цікавить (дане дослідження проводиться для абстрактної моделі, а не для конкретного механізму чи машини), то використаємо енергетичну характеристику для оцінки величини залишкових коливань веденої маси.

Чисельник правої частини виразу (7) показує повну енергію коливань маси m_2 у момент часу T : вона є різницею повної енергії руху маси m_2 та її кінетичної енергії при швидкості v , або це сума потенціальної та кінетичної енергій коливань. Знаменник правої частини виразу (7) дає змогу привести енергетичну оцінку до безрозмірного вигляду оскільки для всіх законів справедлива рівність:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \tilde{A}(T) = \dot{A}_{\text{еґ.оіі.}m_2}. \quad (11)$$

Для того, щоб знайти показник (7) для кожного із законів руху (3)-(6) необхідно розв’язати задачу Коші (неоднорідне диференціальне рівняння (2) із початковими умовами). Права частина рівняння (2) змінюється для кожного закону. Початкові умови для розв’язування задачі Коші приймаємо нульовими. Для кусочного закону (6) розв’язувати рівняння (2) необхідно двічі: для проміжку $t \in [0, T_1]$ та для проміжку $t \in [T_1, T]$, причому для другого проміжку $t \in [T_1, T]$ початкові умови є ненульовими

- це кінцеві умови для проміжку $t \in [0, T_1]$ (таким чином відбувається „зшивка” розв’язків).

Не будемо зупинятись на методиці розв’язання. Запишемо отримані результати. Для лінійного закону (рис. 2, а) показник (7) рівний:

$$\tilde{A}_{\text{ліній}}(T) = \frac{m_2(\cos(T\Omega_0) - 1)}{\tilde{n}\dot{\Omega}^2}. \quad (12)$$

Для U-подібного закону (рис. 2, б) показник (7) рівний:

$$\tilde{A}_U(T) = \frac{(2m_2 + \tilde{n}\dot{\Omega}^2 - 2m_2(\cos(T\Omega_0) + \Omega_0 T \sin(T\Omega_0)))}{\tilde{n}^2\dot{\Omega}^4}. \quad (13)$$

Для S-подібного закону (рис. 2, в) маємо:

$$\tilde{A}_S(T) = \frac{72m_2^2 \left(\sqrt{c}T \cos\left(\frac{T\Omega_0}{2}\right) - 2\sqrt{m_2} \sin\left(\frac{T\Omega_0}{2}\right) \right)^2}{\tilde{n}^3\dot{\Omega}^6}. \quad (14)$$

Для подвійного S-подібного закону (рис. 2, г) вираз для показника (7) досить громіздкий, тому не будемо його приводити.

Вирази (12)-(14) та вираз показника (7) для подвійного S-подібного закону необхідно проаналізувати для того, щоб встановити раціональний параметр T , який досить легко можна налаштувати у сучасних частотних перетворювачах. Для цього побудуємо графіки отриманих функцій у одній площині (рис. 3).

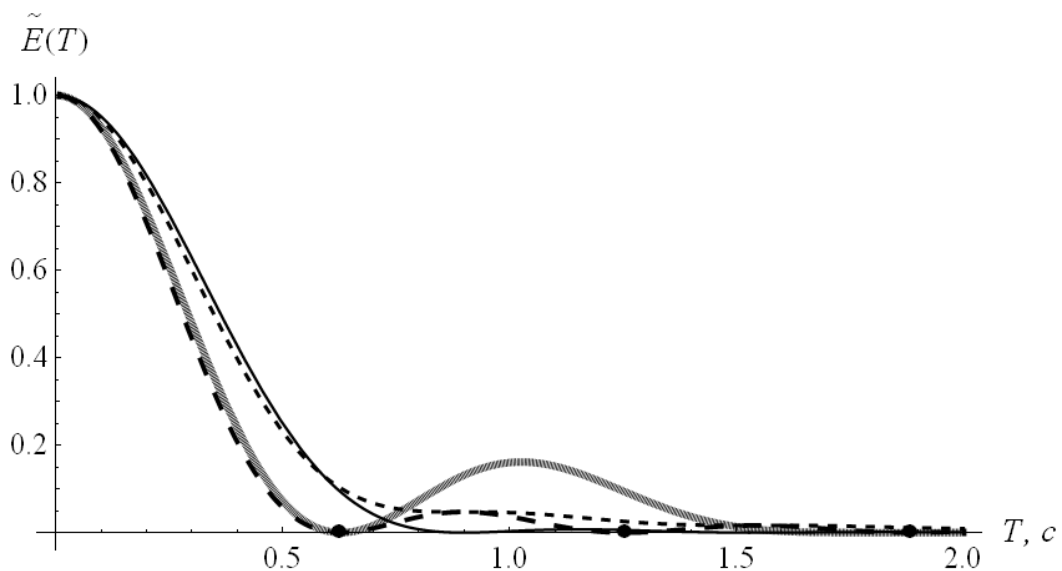


Рис. 3. Графіки енергії залишкових коливань веденої маси m_2 при різних законах зміни швидкості ведучої маси m_1

На рис. 3: закону (3) відповідає штрихова товста лінія, закону (4) – штрихова тонка лінія; закону (5) – суцільна тонка лінія, закону (6) – суцільна сіра товста лінія (для побудови цього графіка прийнято, що $\dot{\Omega}_1 = 0,5\dot{\Omega}$ і $v_1 = 0,5v$). Точками на рис. 3. позначені

величини часу T , які є кратними до тривалості періоду власних коливань динамічної системи.

Тепер по-черзі проведемо аналіз графічних залежностей на рис. 3. Величина питомої енергії залишкових коливань для закону (3) стає рівною нулю у моменти часу, кратні періоду власних коливань динамічної системи. Цей висновок вже відомий у науковій літературі [2]. Якщо прийняти $\frac{2\pi}{\Omega_0} < \dot{\Omega} < \frac{4\pi}{\Omega_0}$, то коливання веденої маси залишаються, але амплітуда цих коливань є невеликою. При подальшому збільшенні тривалості розгону маси $\frac{4\pi}{\Omega_0} < \dot{\Omega} < \frac{6\pi}{\Omega_0}$ залишкові коливання продовжують зменшуватись. Однак, надмірне збільшення тривалості перехідного процесу може викликати зменшення продуктивності роботи машини та перевантаження електроприводу, особливо частотного перетворювача. Якщо невідома величина частоти власних коливань динамічної системи, то використання цього закону є небажаним, за винятком тих випадків, коли тривалість перехідного процесу не є визначальним фактором якості технологічного процесу, а електропривод може бути значно перевантажений (мається на увазі струмове перевантаження).

Для закону (4) відсутність коливань досягається при $\dot{\Omega} \rightarrow \infty$, що, звичайно, не є фізичним. Однак, при збільшенні тривалості перехідного процесу залишкові коливання зменшуються значно. Можна зробити висновок: використовувати закон (4) для розгону двомасової динамічної системи не рекомендується. Виняток може становити лише випадок значної тривалості розгону.

Закон розгону динамічної двомасової системи (5) має цінні властивості з позицій зниження коливань веденої маси у кінці розгону. У моменти часу:

$$\dot{\Omega}_i = \frac{2\pi\sqrt{2i}}{\Omega_0}, \quad i = 1, 3, 6, 10, 15, 21... \quad (15)$$

коливання веденої маси взагалі усуваються. Після моменту часу $\dot{\Omega} > \frac{2\pi\sqrt{2}}{\Omega_0}$ коливання веденої маси залишаються, але їх енергія є дуже малою. Таким чином, можна зробити висновок: для динамічних систем, власна частота коливань яких не може бути визначена точно, а лише є приблизна їх оцінка необхідно виконувати їх розгін і гальмування за законом зміни швидкості (5), при цьому тривалість розгону та гальмування необхідно априорі встановлювати згідно виразу:

$$T \geq \frac{2\pi\sqrt{2}}{\Omega_{0\min}}, \quad (16)$$

де $\Omega_{0\min}$ - найменше значення оцінки частоти власних коливань динамічної системи. Таке налаштування буде гарантувати значне зменшення залишкових коливань веденої маси у кінці розгону та гальмування.

Закон руху динамічної системи, який відповідає подвійному S-подібному характеру зміни швидкості ведучої маси має такі властивості: коливання веденої маси припиняються у моменти часу:

$$\dot{O}_j = \frac{j\pi}{\Omega_0}, \quad j = 2, 6, 10, 14... \quad (17)$$

Зазначимо, що при $j = 2$ коливання веденої маси усуваються – в цьому цей закон подібний до лінійного закону зміни швидкості (3). Однак, при $\frac{2\pi}{\Omega_0} < \dot{O} < \frac{6\pi}{\Omega_0}$ залишкові коливання веденої маси мають значну енергію. Це є серйозним недоліком цього закону, тому його використання потребує обґрунтування, наприклад, виходячи із деяких технологічних аспектів. Однак, необхідно пам'ятати про те, що графік побудований на рис. 3 справедливий для випадку коли $\dot{O}_1 = 0,5\dot{O}$ і $v_1 = 0,5v$. Якщо ж змінити коефіцієнти біля величин \dot{O} та v відповідно зміниться і властивості закону. На рис. 4 показано, як змінюється залишкова питома енергія коливань веденої маси в залежності від тривалості першого етапу \dot{O}_1 та від величини проміжної швидкості v_1 .

Лінії на рис. 4. із відповідними числовими позначками показують енергію залишкових коливань веденої маси. Аналізуючи графіки, можна прийти до висновку про те, що існують певні комбінації \dot{O}_1 та v_1 за яких енергія коливань веденої маси є невеликою. Таким чином, попередній висновок щодо значної величини енергії залишкових коливань веденої маси при $\frac{2\pi}{\Omega_0} < \dot{O} < \frac{6\pi}{\Omega_0}$ є лише частинним. Необхідно зробити таке зауваження: функція питомої енергії залишкових коливань веденої маси при законі розгону ведучої маси (6) є складним виразом:

$$\tilde{A}_{2s}(T) = f(T_1, T, v_1). \quad (18)$$

Дослідження цієї функції на мінімум є непростою задачею, яка пов'язана із необхідністю розв'язування системи трансцендентних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{A}_{2s}(T)}{\partial T_1} = 0; \\ \frac{\partial \tilde{A}_{2s}(T)}{\partial T} = 0; \\ \frac{\partial \tilde{A}_{2s}(T)}{\partial v_1} = 0. \end{cases} \quad (19)$$

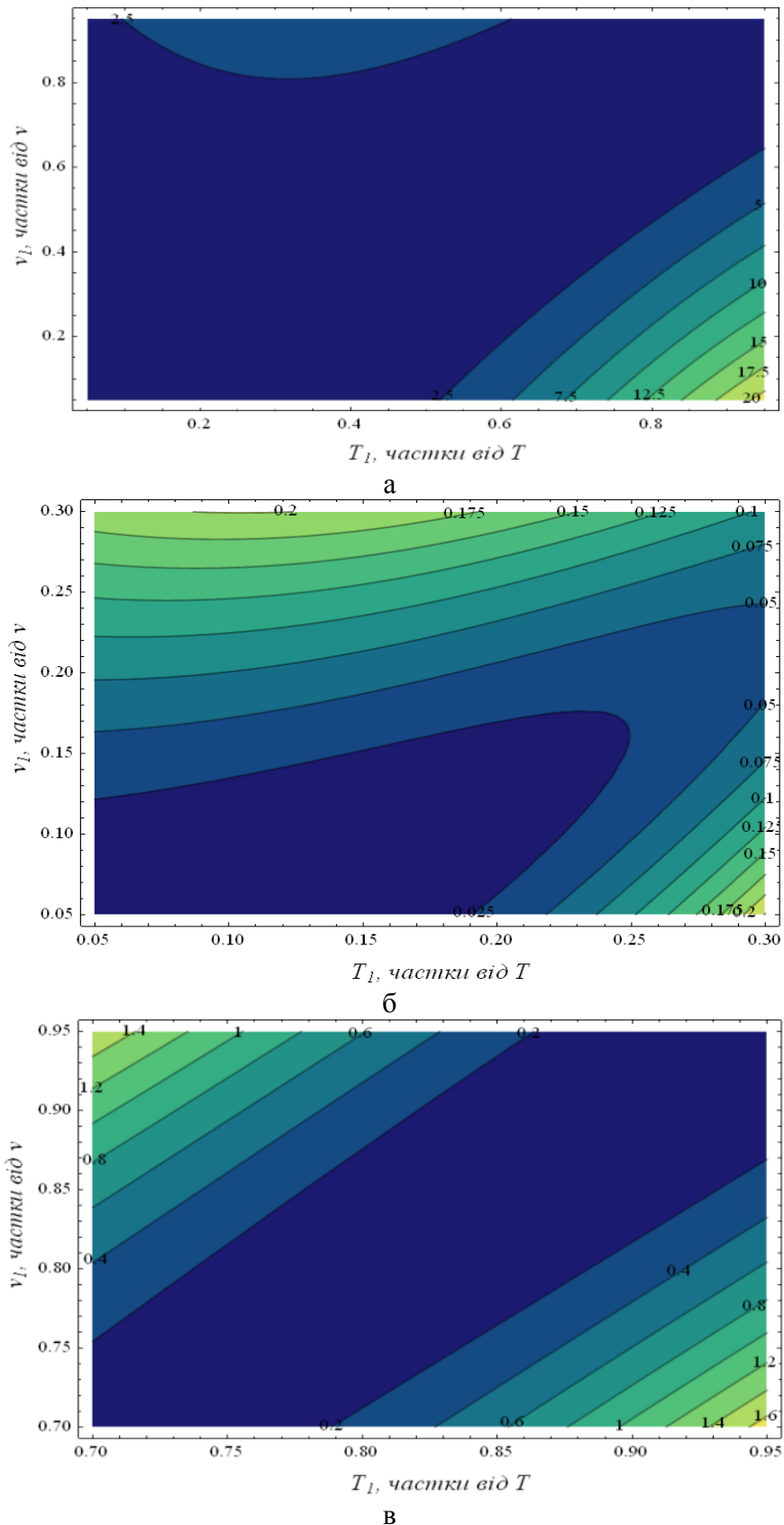


Рис. 4. Графіки функції залишкової питомої енергії коливань веденої маси в залежності від параметрів $\dot{\Delta}_1$ і v_1 : а) для меж зміни параметрів $\dot{\Delta}_1 \in [0,05\dot{\Delta}; 0,95\dot{\Delta}]$ та $v_1 \in [0,05v; 0,95v]$; б) для меж зміни параметрів $\dot{\Delta}_1 \in [0,05\dot{\Delta}; 0,5\dot{\Delta}]$ та $v_1 \in [0,05v; 0,5v]$; в) для меж зміни параметрів $\dot{\Delta}_1 \in [0,7\dot{\Delta}; 0,95\dot{\Delta}]$ та $v_1 \in [0,7v; 0,95v]$.

Крім того, ситуація ускладнюється обмеженнями накладеними на параметри:

$$\begin{cases} v_1 < v; \\ T_1 < T. \end{cases} \quad (20)$$

Задача (19)-(20) є досить складною задачею нелінійного програмування.

Отже, дати однозначну відповідь про те, які параметри частотного електроприводу необхідно налаштовувати (і як це зробити) для даного закону руху досить важко. Можна порекомендувати лише скористатись графічними залежностями приведеними на рис. 4.

Висновок. Приведений вище аналіз дає змогу зробити певні висновки. За показником питомої енергії залишкових коливань веденої маси S-подібний та подвійний S-подібний закони мають найкращі характеристики. Однак при цьому тривалість перехідного процесу розгону динамічної системи є дещо „затягнутою” (у масштабах періоду коливань системи). Для динамічних систем у яких параметр власної частоти коливань визначається лише приблизно можна користуватись такими законами: вони є стандартними для сучасних частотних перетворювачів і необхідно лише провести відповідне налаштування. Для подвійного S-подібного закону зміни швидкості ведучої маси при розгоні необхідно уникати певних комбінацій проміжної швидкості та тривалості часу першого етапу розгону для того, щоб зменшити енергію коливань веденої маси після закінчення перехідного процесу.

Серед інших законів зміни швидкості можна також рекомендувати лінійний закон. Однак при цьому необхідно мати точне значення частоти власних коливань системи. Якщо ж таких даних немає, то єдиним шляхом зменшення енергії залишкових коливань є подовження процесу розгону, що у свою чергу зменшує продуктивність машини чи механізму. U-подібний закон зміни швидкості ведучої маси не дозволяє у кінці розгону повністю усувати коливання веденої маси і тому не рекомендується до застосування.

Необхідно також зробити загальне зауваження: всі приведені висновки стосуються нульових початкових умов (коливання веденої маси на початку руху відсутні). Якщо ж коливання присутні, то необхідно враховувати їх фазу, що є більш складною задачею, яка, крім того, ускладнюється у плані технічної реалізації через необхідність використання датчика коливань веденої маси.

ЛІТЕРАТУРА

1. Волошко О.В. Підвищення точності керування двомасовою електромеханічною системою на основі робастних методів: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.09.03 „Електротехнічні комплекси та системи” / О.В. Волошко; Науково-

технічний цент магнетизму технічних об'єктів. – Харків, 2012. – 23 с.: іл. – Бібліогр.: С. 17–18.

2. Комаров М.С. Динамика грузоподъемных машин / Комаров М.С. – М.: Машиностроение, 1969. – 206 с.

3. Моделювання динаміки механізмів вантажопідйомних машин / [Ловейкін В.С., Човнюк Ю.В., Діктерук М.Г., Пастушенко С.І.]. – К.-Миколаїв: РВВ МДАУ, 2004. – 286 с.

4. Петров Ю.П. Вариационные методы теории оптимального управления. – Л.: Энергия, 1977. – 280 с.

5. Понтрягин Л.С., Болтнянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Физматгиз, 1961. – 392 с.

6. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования / [перевод с англ. Митрофановой, Н.М., Первозванского А.А., Хусу А.П., Шалаевского О.В.] – М.: Наука, 1965. – 460 с.

7. Кротов В.Ф. Методы и задачи оптимального управления / В.Ф. Кротов, В.И. Гурман. – М.: Наука, 1973. – 389 с.

8. Красовский И.И. Теория управления движением (линейные системы). - М.: Наука, 1968. - 476 с.

9. Ловейкін В.С., Ромасевич Ю.О. Оптимізація перехідних режимів руху механічних систем прямим варіаційним методом. – К.; Ніжин: Видавець ПП Лисенко М.М., 2010. - 184 с.

10. Тарасик В.П. Математическое моделирование технических систем: учебник для вузов / В.П. Тарасик. – Мн: ДизайнПРО, 2004. – 640 с.

11. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / А.А. Самарский, А.П. Михайлов – 2-е изд., испр. – М.: Физматлит. 2001. – 320 с.

12. Грузоподъемные краны. Кн. 2 / Шеффлер М., Дресиг Х., Курт Ф.; [пер. с немецкого М.М. Рунов, В.Н. Федосеев]; под ред. М.П. Александрова. – М.: Машиностроение, 1981. – 287 с.

13. Лобов Н. А. Динамика грузоподъемных кранов / Лобов Н. А. – М.: Машиностроение, 1987. – 160 с.

14. FR-E700. Преобразователь частоты. Инструкция по эксплуатации (FR-E720 EC, FR-E740 EC): [каталог]. – [Москва: Mitsubishi Electric Europe B.V.]. – 526 с.

15. Руководство пользователя преобразователей MICROMASTER 440: [каталог]. – [Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский технический центр поддержки SIEMENS]. – 140 с.