

УДК 539.3

**ВРАХУВАННЯ ОРТОТРОПНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ МАТЕРІАЛУ ПРИ
МОДЕЛЮВАННІ ТОВСТИХ ОБОЛОНОК ПРОСТОРОВИМИ
КРИВОЛІНІЙНИМИ СКІНЧЕНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ**

*Пікуль А.В.
ТОВ "Ліра САПР"*

В реальному будівництві використовують нетонкі пластини та оболонки (плитні фундаменти, підземні резервуари). Збільшення товщини таких елементів погіршує точність їх розрахунку в більшості програмних комплексів, де розрахунок базується на теорії тонких пластин і оболонок. Опорні та навантажуючі елементи, що часто розміщені по області пластин, створюють складний напружено-деформований стан з великими перепадами функцій напруження по товщині пластини. Побудова співвідношень на основі гіпотез Кірхгофа-Лява не дає можливості врахувати всі напруження, що призводить до зростання похибки при розрахунку таких конструкцій.

В рамках написання дисертаційної роботи було виведено просторовий криволінійний скінченний елемент [5]. В даній статті наведено викладки для вдосконалення його врахуванням ортотропії для можливості застосування при розв'язуванні задач теорії пружності в фізично-нелінійній постановці.

Розглянемо об'ємний криволінійний скінченний елемент оболонки. В центрі скінченного елемента розміщуємо криволінійну систему координат x^1, x^2, x^3 .

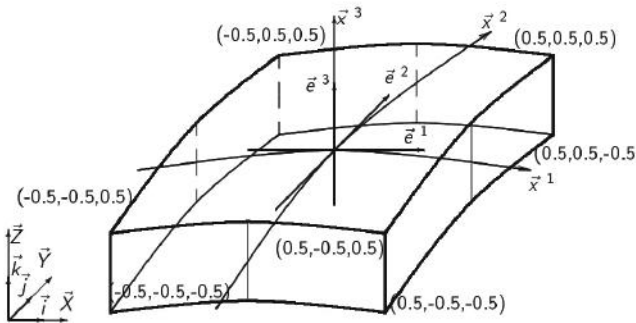


Рис.1: Просторовий СЕ в криволінійній системі координат

Таким чином контури СЕ знаходяться в межах від $x^i = -0.5$ до $x^i = 0.5$. Отже розміри сторін визначаються коефіцієнтами першої квадратичної форми поверхні $\sqrt{g_{ii}}$, де $g_{ij} = \bar{e}_i \bar{e}_j (i, j = \alpha, \beta, \gamma)$, а об'єм відповідає визначнику метричного тензора \sqrt{G} :

$$G = \det \|\vec{g}_{ij}\| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}.$$

Серединна поверхня в декартовій системі координат XYZ описується функціями $X=X(x^1, x^2, x^3)$, $Y=Y(x^1, x^2, x^3)$, $Z=Z(x^1, x^2, x^3)$.

Вектори, що описуються залежностями

$$\bar{e}_\alpha = \frac{\partial X}{\partial x^\alpha} \bar{i} + \frac{\partial Y}{\partial x^\alpha} \bar{j} + \frac{\partial Z}{\partial x^\alpha} \bar{k} \quad (\alpha=1,2),$$

дотичні до координатних ліній x^1, x^2, x^3 і співпадають з напрямком зростання відповідних координат. Вектор \vec{e}_3 співпадає з ортом нормалі до серединної поверхні $\bar{e}_3 = \frac{\bar{e}_1 \times \bar{e}_2}{|\bar{e}_1 \times \bar{e}_2|} = \frac{\bar{e}_1 \times \bar{e}_2}{\sqrt{g}}$

Ці вектори являють собою основний локальний базис точок серединної поверхні скінченного елемента оболонки.

Вектори взаємного базису пов'язані з векторами основного базису співвідношеннями

$$\bar{e}^1 = \frac{\bar{e}_2 \times \bar{e}_3}{|\bar{e}_2 \times \bar{e}_3|} = \frac{\bar{e}_2 \times \bar{e}_3}{\sqrt{g}},$$

$$\bar{e}^2 = \frac{\bar{e}_3 \times \bar{e}_1}{|\bar{e}_3 \times \bar{e}_1|} = \frac{\bar{e}_3 \times \bar{e}_1}{\sqrt{g}},$$

де $g = \det \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}$.

Переміщення точок елемента оболонки описуються вектор-функцією координат серединної поверхні $\vec{u} = \vec{u}(x^1, x^2, x^3)$.

Коваріантні компоненти тензора деформацій визначаються диференціальними залежностями:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x^\alpha} \bar{e}_\beta + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x^\beta} \bar{e}_\alpha \right).$$

Для однорідного ізотропного матеріалу закон Гука мав такий вигляд

$$\sigma^{\alpha\beta} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu g^{\alpha\beta} g^{\gamma\omega} + (1-2\nu) g^{\alpha\gamma} g^{\beta\omega}] \varepsilon_{\gamma\omega},$$

де E – модуль пружності матеріалу, $\sigma^{\alpha\beta}$ – коваріантна компонента тензора напружень.

Для ортотропного матеріалу закон Гука набуває вигляду:

$$\sigma^{\alpha\beta} = [E_{\alpha\beta\gamma\omega} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\omega} + E_{\alpha\gamma\beta\omega} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\omega}] \varepsilon_{\gamma\omega},$$

де всі $E_{\alpha\beta\gamma\omega} = 0$, окрім наведених нижче:

$$\begin{aligned} E_{1111} &= E_1 & E_{1122} &= E_1 \cdot \nu_{12} & E_{2211} &= E_2 \cdot \nu_{21} & E_{1212} &= E_{2121} = G_{12} \\ E_{2222} &= E_2 & E_{2233} &= E_2 \cdot \nu_{23} & E_{3322} &= E_3 \cdot \nu_{32} & E_{2323} &= E_{3232} = G_{23} \\ E_{3333} &= E_3 & E_{1133} &= E_1 \cdot \nu_{13} & E_{3311} &= E_3 \cdot \nu_{31} & E_{1313} &= E_{3131} = G_{13} \end{aligned}$$

Потенціальну енергію деформації запишемо у вигляді

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{2} \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} \sigma^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \sqrt{G} dx^1 dx^2 dx^3.$$

Вектор-функцію переміщень апроксимуємо рядом Маклорена

$$\bar{U}(x^1, x^2, x^3) = \bar{U}^0 + \frac{\partial \bar{U}^0}{1! \partial x^\alpha} x^\alpha + \frac{\partial^2 \bar{U}^0}{2! \partial x^\alpha \partial x^\beta} x^\alpha x^\beta + \frac{\partial^3 \bar{U}^0}{3! \partial x^\alpha \partial x^\beta \partial x^\gamma} x^\alpha x^\beta x^\gamma + \dots$$

Отримуємо залежності для деформацій

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(U_{\alpha\nu\beta}^0 + U_{\beta\nu\alpha}^0 U_{\alpha\nu\beta\gamma}^0 x^\gamma + U_{\beta\nu\alpha\omega}^0 x^\omega + \frac{1}{2!} U_{\alpha\nu\beta\gamma\omega}^0 x^\gamma x^\omega \right),$$

або в матричному вигляді $\{\varepsilon\} = [D_\varepsilon]\{\phi\}$, де $[D_\varepsilon]$ – матриця коефіцієнтів, що пов’язують деформації з набором коефіцієнтів апроксимуючого ряду переміщень $\{\phi\}$:

Вектор вузлових переміщень:

$$\{U\} = \left\{ U_1^0, U_2^0, U_1^0, U_3^0, U_{1|1}^0, U_{2|1}^0, U_{3|1}^0, U_{1|2}^0, U_{2|2}^0, U_{3|2}^0, U_{1|3}^0, U_{2|3}^0, U_{3|3}^0, U_{1|12}^0, U_{2|12}^0, U_{3|12}^0, U_{1|13}^0, U_{2|13}^0, U_{3|13}^0, U_{1|23}^0, U_{2|23}^0, U_{3|23}^0, U_{1|123}^0, U_{2|123}^0, U_{3|123}^0 \right\}^T.$$

де символами «+» і «-» позначені величини +0,5 і -0,5 координат x^1, x^2, x^3 .

$$\{U\} = \left\{ U_1^{0---}, U_2^{0---}, U_3^{0---}, U_1^{+---}, U_2^{+---}, U_3^{+---}, U_1^{-+-}, U_2^{-+-}, U_3^{-+-}, U_1^{+-+}, U_2^{+-+}, U_3^{+-+}, U_1^{-++}, U_2^{-++}, U_3^{-++}, U_1^{+++}, U_2^{+++}, U_3^{+++} \right\}^T,$$

Пряма та зворотня залежності вектора вузлових переміщень і вектора коефіцієнтів апроксимуючого ряду визначаються матрицею $[P]$:

$$\begin{aligned} U_j^{\alpha\beta\gamma} &= U_i \cdot a_{j\alpha\beta\gamma}^i + U_{i\nu\alpha} \cdot a_{j\alpha\beta\gamma}^i \cdot \alpha + \frac{1}{2!} U_{i\nu\alpha\beta} \cdot a_{j\alpha\beta\gamma}^i \cdot \alpha\beta + \dots \\ a_{j\alpha\beta\gamma}^i &= \bar{e}^i(0,0,0) \cdot \bar{e}_j(\alpha,\beta,\gamma). \end{aligned}$$

Компоненти матриці $[P]$ визначаються з наступних співвідношень

$$\begin{aligned} \{U\} &= [P]\{\phi\}, \\ \{\phi\} &= [P]^{-1}\{U\} = [S]\{U\}. \end{aligned}$$

Потенціальна енергія елемента через вузлові переміщення визначається функціоналом

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} \{U\}^T [S]^T [D_\varepsilon]^T [A] [D_\varepsilon] [S] \{U\} \sqrt{G} dx^1 dx^2 dx^3 - \{U\}^T [F] - \{U\}^T [R],$$

де $[A]$ – матриця пружних сталих матеріалу, $[F]$ – вектор вузлових навантажень, $[R]$ – вектор реакцій.

З умови стаціонарності функціоналу повної потенціальної енергії скінченного елемента $\delta\Pi = [K]\{U\} - [F] - [R] = 0$, визначаємо вектор реакцій

$$[R] = [K]\{U\} - [F],$$

де $[K]$ – матриця жорсткості, котра має наступний вигляд

$$[K] = \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} [S]^T [D_\varepsilon]^T [A] [D_\varepsilon] [S] \sqrt{G} dx^1 dx^2 dx^3.$$

При розрахунку поліматеріальних конструкцій за допомогою МСЕ в фізично-нелінійній постановці, необхідно враховувати ортотропні властивості матеріалу конструкції. Особливо важливо враховувати зміну співвідношення жорсткісних характеристик матеріалу по різних напрямках в межах скінченного елемента при покроковому зростанні навантаження на конструкцію.

Отримані результати дозволяють виконувати розрахунки товстостінних поліматеріальних конструкцій (наприклад залізобетонних або бетонних, підсиленних арматурою з полімерних матеріалів) за допомогою МСЕ в фізично-нелінійній постановці.

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Блох В.И. Теория упругости — Х.: Изд-во Харьковск. Гос. Ун-та, 1964 — 438 с.
2. Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. — М.: Высшая школа. 1966 — 256 с.
3. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. Пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — 428 с.
4. Городецкий А.С., Евзеров И.Д. Компьютерные модели конструкций. — К.: Факт, 2007. — 394 с.
5. Гоцуляк Є.О., Пікуль А. В. Реалізація просторового скінченного елемента в криволінійній системі координат. — Опір матеріалів і теорія споруд: Науково-технічний збірник. — Вип.88 — К.:КНУБА, 2011. — с.120—125.
6. Кабриц С.А., Черных К.Ф. — Общая нелинейная теория упругих оболочек. СПб.: Изд-во С.Петербур. Ун-та, 2002. — 388 с.