УДК 519.85

УНИВЕРСАЛЬНОЕ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

КОСОЛАП А. И., *д. физ-мат. н., проф.*

Кафедра специализированных компьютерных систем, Государственное высшее учебное заведение «Украинский государственный химико-технологический университет», ул. Набережная Победы, 40, 49005, Днепропетровск, Украина, тел. +38 (0562) 7535726, e-mail: anivkos@ua.fm, ORCID ID: 0000-0001-73386707.

Аннотация. ***Цель***. В работе рассматриваются классы задач нелинейной оптимизации. Такие задачи возникают при проектировании, построении и управлении сложными системами. В большинстве случаев такие задачи являются многоэкстремальными. Эти классы задач включают оптимизацию с непрерывными, целочисленными, булевыми переменными, задачи на перестановках, задачи с гладкими и негладкими функциями. Для каждого класса таких задач разработано множество различных методов и программ, что порождает трудности при их решении. ***Методика.*** В работе предлагается преобразовывать рассмотренные классы задач к единому каноническому виду, что позволяет ограничиться одним методом и использовать единое программное обеспечение. ***Результаты.*** Для преобразования задач к каноническому виду используется точная квадратичная регуляризация, которая позволяет находить глобальные решения в задачах нелинейной оптимизации. Канонический вид является задачей максимизации нормы вектора на выпуклом множестве. Такая задача методом Келли преобразуется к максимизации нормы вектора на выпуклом многограннике. Используя точную квадратичную регуляризацию, выпуклый многогранник преобразуем к пересечению шаров. Задача максимума нормы вектора на пересечении шаров эффективно решается двойственным методом при помощи того же программного обеспечения. ***Научная новизна.*** Разработана новая методология решений сложных оптимизационных задач, которые возникают при моделировании сложных систем. ***Практическая значимость.*** Рассмотренная методика решения сложных задач нелинейной оптимизации реализована в виде программного обеспечения. Сравнительные эксперименты подтверждают эффективность данной методики при решении классов задач нелинейной оптимизации.

Ключевые слова: сложные системы, нелинейная оптимизация, многоэкстремальные задачи, точная квадратичная регуляризация, программное обеспечение.

УНІВЕРСАЛЬНЕ ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ДЛЯ ОПТИМІЗАЦІЇ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

КОСОЛАП А. І., *д. фіз-мат. н., проф.*

Кафедра спеціалізованих комп'ютерних систем, Державний вищий навчальний заклад «Український державний хіміко-технологічний університет», вул. Набережна Перемоги, 40, 49005, Дніпропетровськ, Україна, тел. +38 (0562) 7535726, e-mail: anivkos@ua.fm, ORCID ID: 0000-0001-73386707.

Анотація. ***Мета.*** У роботі розглядаються класи задач нелінійної оптимізації. Такі задачі виникають при проектуванні, побудові та управлінні складними системами. У більшості випадків такі задачі є багатоекстремальними. Ці класи задач включають оптимізацію з неперервними, цілочисельними, булевими змінними, задачами на перестановках, задачами з гладкими та негладкими функціями. Для кожного класу таких задач розроблено безліч різних методів і програм, що породжує труднощі при їх розв'язанні. ***Методика.*** У роботі пропонується перетворювати розглянуті класи задач до єдиного канонічного вигляду, що дозволяє обмежиться одним методом та використовувати єдине програмне забезпечення. ***Результати.*** Для перетворення задач до канонічного вигляду використовується точна квадратична регуляризація, яка дозволяє знаходити глобальні розв'язки в задачах нелінійної оптимізації. Канонічний вигляд є задачею максимізації норми вектора на опуклій множині. Така задача методом Келлі перетвориться до максимізації норми вектора на опуклому многограннику. Використовуючи точну квадратичну регуляризацію, опуклий многогранник перетворюємо до перетину куль. Задача максимуму норми вектора на перетині куль ефективно розв'язується двоїстим методом за допомогою того ж програмного забезпечення. ***Наукова новизна.*** Розроблена нова методологія розв'язування складних оптимізаційних задач, які виникають при моделюванні складних систем. ***Практична значимість.*** Розглянута методика розв'язування складних задач нелінійної оптимізації реалізована у вигляді програмного забезпечення. Порівняльні експерименти підтверджують ефективність даної методики при розв'язуванні класів задач нелінійної оптимізації.

Ключові слова: складні системи, нелінійна оптимізація, багатоекстремальні задачі, точна квадратична регуляризація, програмне забезпечення.

UNIVERSAL SOFTWARE FOR OPTIMIZATION OF COMPLEX SYSTEMS

KOSOLAP A. I., *Dr. Sc. (Phys.-Math.), Prof.*

Department of specialized computer systems, State Higher Education Establishment "Ukrainian State University of Chemical Technology", 40, Naberezhna Peremogy str., Dnipropetrovsk 49005, Ukraine, tel. +38 (0562) 7535726, e-mail: anivkos@ua.fm, ORCID ID: 0000-0001-73386707

Abstract. ***Purpose.*** We consider the class of problems of nonlinear optimization. Such problems arise in the design, construction and management of complex systems. In most cases, such problems are multiextremal. These classes include optimization problems with continuous, integer, Boolean variables, the problem on permutations, the problem with smooth and non-smooth functions. For each class of such problems developed many different methods and software that creates difficulties in solving them. ***Methodology***. We transform classes of problems to a single canonical form that allows to use only one method and use a single software. ***Findings.*** Transformation use of the exact quadratic regularization, which allows us to find global solutions to the problems of nonlinear optimization. The canonical form is the task of maximizing the norm of a vector on a convex set. The method Kelly converted to the maximization norm of a vector on a convex polyhedron. At using exact quadratic regularization of a convex polyhedron transform to the intersection of the balls. The problem of the maximum norm of the vector at the intersection of the balls effectively solved the dual method using the same software. ***Originality.*** We have developed new methodology for the solution of difficult optimizing problems which arise at modelling of difficult systems. ***Practical value.*** The considered technique for solving complex problems of nonlinear optimization is implemented in software. Comparative experiments confirm the effectiveness of this method for solving problems of nonlinear optimization classes.

Keywords: complex systems, nonlinear optimization, multiextremal problems, the exact quadratic regularization, software.

Постановка проблемы

С каждым годом растет число сложных объектов, которые создаются человеком. Это сложные объекты техники, строительства, управления, информатики, инфраструктуры, экономики и других областей. На все это тратится огромное число ограниченных ресурсов. Поэтому при проектировании сложных систем необходимо оптимизировать использование ресурсов. Как правило, построению сложной системы предшествует разработка математической модели объекта. Существует огромное число классов математических моделей, но наибольшее распространение получили оптимизационные модели [13, 14]. Оптимизационные модели делятся на несколько классов: с непрерывными переменными, с целочисленными или булевыми переменными, с гладкими или недифференцированными функциями. Для каждого класса моделей разработано несколько численных методов [1, 5, 11]. Выбор наилучшего метода часто под силу только специалисту. Очень часто для построения оптимизационной модели достаточно общих квадратичных функций. Программное обеспечение для таких моделей не требует написания программного кода нелинейных зависимостей, но для неквадратичных зависимостей такой код необходим.

Анализ последних достижений

Для решения линейных задач оптимизации используется сиплекс-метод. Альтернативой ему является прямо-двойственный метод внутренней точки [12]. Этот метод был обобщен и на решение нелинейных задач. Однако эти методы позволяют находить только локальные решения (локальные экстремумы). Сложные системы приводят, как правило, к многоэкстремальным моделям. Предпринимаются значительные усилия для поиска эффективных алгоритмов нахождения глобальных экстремумов. Однако до настоящего времени этот вопрос остается открытым и ничего лучшего методов случайного поиска предложено не было.

Цель

В данной работе предлагается преобразовывать нелинейные модели сложных систем к специальному (каноническому) виду, что позволяет разработать универсальное программное обеспечение для решения оптимизационных задач.

Целью данной работы является разработка единого подхода к решению нелинейных оптимизационных задач с использованием точной квадратичной регуляризации.

Постановка задачи и ее решение

Рассмотрим задачу оптимизаци

$$\min\{f_0(x) \mid f_i(x) \le 0, i = 1,\dots,m, x \in E^n\}, \quad (1)$$

где все $f_i(x)$ – дважды дифференцированные функции, E^n – евклидово пространство. Допустим, что решение задачи (1) существует. Для этого достаточно чтобы функция $f_0(x)$ была непрерывна, а допустимая множество задачи (1) было компактно.

Если задача (1) является моделью сложной системы, то она, как правило, многоэкстремальная. Она будет одноэкстремальной, если все $f_i(x)$ – выпуклые функции. Это условие можно ослабить, заменив выпуклые функции квазивыпуклыми [2]. В остальных случаях, задача (1) может иметь много локальных минимумов, и решение такой задачи является сложной проблемой. Несмотря на значительные усилия по разработке методов поиска глобального минимума в задаче (1) [2, 6, 7, 8, 10], до настоящего времени эффективного метода для решения этой проблемы не разработано. В данной работе показано, что для эффективного решения задачи (1) достаточно только локального прямо-двойственного метода внутренней точки [12].

Покажем, как другие классы задач нелинейной оптимизации преобразуются к виду (1). Задача с целочисленными переменными

$$\min\{f_0(x) \mid f_i(x) \le 0, i=1,\dots,m, x - \textit{целые}\}$$

преобразуется к виду

$$\min\{f_0(x) \mid f_i(x) \le 0, i=1,\dots,m,$$
$$\sum_{i=1}^{n}(1-\cos(2\pi x_i)) \le 0\}.$$

Существуют классы задач на перестановках, тогда целочисленные переменные должны удовлетворять дополнительным условиям

$(x_i - x_j) \ge 1, \forall i \ne j.$

Задача с булевыми переменными

$\min\{f_0(x) \mid f_i(x) \le 0, i=1,\dots,m, x = 0 \vee 1\}$

эквивалентна задаче (1) после преобразования

$$\min\{f_0(x) \mid f_i(x) \le 0, i=1,\dots,m, 0 \le x \le 1,$$
$$\sum_{i=1}^{n}(x_j - 0.5)^2 \le \frac{n}{4}\}.$$

Большинство математических моделей с негладкими функциями содержат модули функций. После подстановки фиксированных значений переменных в такие модули, их можно раскрыть и получить задачу вида (1) с гладкими функциями. Процедура преобразования задач с негладкими функциями к гладким функциям описана в работе [1].

Таким образом, практически все классы задач нелинейной оптимизации преобразуются к виду (1). Сложность решения задачи (1) связана с ее многоэкстремальностью. Преобразуем ее к более простой задаче.

Преобразование задачи (1) к каноническому виду

Введем новую переменную x_{n+1} и преобразуем задачу (1) к эквивалентной задаче

$$\min\{x_{n+1} \mid f_0(x) + s \le x_{n+1}, f_i(x) \le 0,$$
$$i=1,\dots,m, x \in E^n\}, \tag{2}$$

где значение параметра s выбираем таким, чтобы

$$f_0(x^*) + s \ge \| x^* \|^2, \tag{3}$$

x^* – решение задачи (1).

Далее, используем преобразование пространства $x = Az$, где матрица A порядка $(n+1)\times(n+1)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1 & z_2 & \dots & z_{n+1} \end{pmatrix},$$

что сводит задачу (2) к следующей:

$$\min\{\| z \|^2 \mid f_0(\bar z) + s \le \| z \|^2, f_i(\bar z) \le 0,$$
$$i=1,\dots,m, z \in E^{n+1}\}, \tag{4}$$

где $\bar z = (z_1,\dots,z_n)$, $z = (\bar z, z_{n+1})$.

Существует такое значение $r > 0$, что все функции

$$g_0(z) = f_0(\bar z) + s + (r-1)\| z \|^2,$$
$$g_i(z) = f_i(\bar z) + r \| z \|^2, i=1,\dots,m$$

будут выпуклыми для допустимых значений z. Действительно, при соответствующем выборе параметра $r > 0$, гессианы функций $g_0(z)$ и $g_i(z), i=1,\dots,m$ будут положительно определенными матрицами (матрицы с преобладающей главной диагональю являются положительно определенными), что является достаточным условием выпуклости функций. Таким образом, с помощью квадратичного слагаемого функции задачи (1) преобразуются к выпуклым. Если среди функций $f_i(\bar z), i=1,\dots,m$ есть выпуклые, то эти ограничения остаются неизменными.

Таким образом, задача (4) сведена к следующей:

$$\min\{\| z \|^2 \mid g_i(z) \le d, i=0,\dots,m,$$
$$r \| z \|^2 = d\}, \tag{5}$$

где все $g_i(z)$ – выпуклые функции.

Решение задачи (5) позволяет однозначно определить решение исходной задачи (1). Задача (1) преобразована к задаче (5) при помощи точной квадратичной регуляризации.

Введем обозначения

$$S_1(d) = \{z \mid g_i(z) \le d, i=0,\dots,m\}$$

и

$$S_2(d) = \{z \mid r \| z \|^2 \le d\}.$$

Множества $S_1(d)$ и $S_2(d)$ будут выпуклыми и определяют допустимое множество задачи (5). Справедливо следующее включение

$$S_1(d) \subset S_1(d+\Delta), S_2(d) \subset S_2(d+\Delta) S_1(d)$$

для любого $\Delta > 0$, что следует из выпуклости множеств $S_1(d)$, $S_2(d)$. Анализ расположения в евклидовом пространстве этих множеств позволяет разбить исходную задачу (1) на два класса сложности.

Пусть d_0 – минимальное значение d, для которого множество $S_1(d) \neq \otimes$. Нахождение d_0 равнозначно решению выпуклой задачи $\min\{d|g_i(z) \leq d,\ i=0,\dots, m\}$. Найдем $d_m = \max\{0,\ d_0\}$, тогда возможны два варианта.

1. Если $S_1(d_m) \cap \operatorname{int} S_2(d_m) = \otimes$ или $S_1(0) \neq \otimes$, то задача (5) эквивалентна выпуклой задаче

$$\min\{d \mid g_i(z) \leq d, i=0,\dots,m, r\|z\|^2 \leq d\} \quad (6)$$

которая эффективно решается локальным прямо-двойственным методом внутренней точки. Если (z^*, d^*) – решение задачи (6), то $x^* = \bar{z}^*$ – точка глобального минимума задачи (1) (при выполнении условия $S_1(0) \neq \otimes$ решение задачи (1) – тривиально $x^* = 0$). Решение задачи (6) эквивалентно нахождению точки соприкосновения двух выпуклых множеств $S_1(d)$ и $S_2(d)$ при минимальном значении d. Очевидно, что точка соприкосновения будет допустимой для задачи (5) и в этой точке достигается минимальное значение $\|z\|^2$.

2. Если $S_1(d_m) \cap \operatorname{int} S_2(d_m) \neq \otimes$, то задача (5) эквивалентна задаче максимизации квадрата нормы вектора

$$\max\{\|z\|^2 \mid g_i(z) \leq d, i=0,\dots,m, r\|z\|^2 = d\}. \quad (7)$$

В задаче (7) необходимо найти минимальное значение d, при котором множество $S_1(d)$ касается границы множества $S_2(d)$ изнутри. При меньших значениях d допустимое множество задачи (5) будет пустым.

Таким образом, если в точке локального минимума (z^*, d^*) задачи (6) $r\|z^*\|^2 = d^*$, то соответствующая задача (1) относится к первому классу сложности, иначе – ко второму.

Точная квадратичная регуляризация позволяет упорядочить точки локальных минимумов. Локальный минимум преобразованной задачи с меньшим значением целевой функции задачи (1) будет расположен ближе к началу координат.

Часто на переменные задачи (1) накладывается условие неотрицательности. Если такого условия нет, то задачу (1) легко преобразовать так, чтобы ее точка глобального минимума принадлежала положительному ортанту. Тогда соответствующая задача (7) будет иметь вид

$$\begin{gathered}\max\{\|z\|^2 \mid g_i(z) \leq d, i=0,\dots,m,\\ z \geq 0, r\|z\|^2 = d\}.\end{gathered} \quad (8)$$

Задачу (8) будем решать следующим образом. Фиксируем значение переменной d ($d = d_m + \varepsilon$) и находим решение z^* задачи

$$\max\{\|z\|^2 \mid g_i(z) \leq d, i=0,\dots,m, z \geq 0\} \quad (9)$$

Если $r\|z^*\|^2 = d$, то задача (8) решена и z^* – ее решение, иначе, найдем отрезок $[d_{\min}, d_{\max}]$ для переменной d. Достаточно взять $d_{\min} = d_m$, а $d_{\max}$ определить, решая последовательность задач (9) методом локальной максимизации PDIPM для $d = d_m + kh$, где h– величина шага, k = 1, ... Пусть k_0 – минимальное значение, при котором $r\|z\|^2 > d_m + k_0 h$. Тогда $d_{\max}$ находим на интервале $[d_m + (k_0 - 1)h,\ d_m + k_0 h]$ методом дихотомии, решая задачу (9) до достижения равенства $r\|z\|^2 = d_{\max}$.

В общем случае, рассмотренный метод решения задачи (8) позволяет найти только точку локального минимума, если в задаче (9) найдено локальное решение. Покажем, что дальнейшее преобразование задачи (9) позволит найти ее глобальное решение.

При преобразовании исходной многоэкстремальной задачи методом точной квадратичной регуляризации к задаче максимизации нормы вектора на выпуклом множестве, выпуклые ограничения также могут быть преобразованы по формуле $f_i(x) + r\|z\|^2 \leq d$. Если функции $f_i(x)$ – линейны, то многогранник исходной задачи будет преобразован к пересечению шаров. Задача

$$\max\{\|x\|^2 \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$$

преобразуется к виду

$$\max\{\|x\|^2 \mid a_i^T x + \|x\|^2 - b_i, i=1,\dots,m,$$
$$\|x\|^2 - x_i \leq d, i=1,\dots,n\},$$

где a_i – строки матрицы A. Полученная задача максимизации нормы вектора на пересечении шаров эффективно решается двойственным методом [3]. Используем этот результат для построения алгоритма решения задачи

$$\max\{\|x\|^2 \mid x \in S\}, \quad (10)$$

где S – выпуклое допустимое множество задачи (9). Легко построить прямоугольный параллелепипед P, содержащий множество S. Тогда решение задачи

$$\max\{c^T x \mid x \in P\}, \quad (11)$$

определит верхнюю границу решения задачи (10). Пусть x^1 – решение задачи (11). Будем последовательно отсекать верхние оценки решения задачи (11). Для этого используем метод Келли [4]. Пусть

$$S = \{x \mid f_i(x) \leq 0, i=1,\dots,m\},$$

найдем

$$\max\{f_i(x^1)\} = f_k(x^1)$$

и построим отсекающую гиперплоскость

$$f_k(x^1) + \nabla f_k^T(x^1)(x - x^1) \leq 0.$$

Очевидно, что эта гиперплоскость отсекает точку x^1. Построим усеченный параллелепипед

$$P^1 = P \cap f_k(x^1) + \nabla f_k^T(x^1)(x - x^1) \le 0.$$

Преобразуем P^1 к пересечению шаров и решим полученную задачу двойственным методом. Обозначим через x^2 ее решение, которое будет решением задачи (10), если $x^2 \in S$ и верхней оценкой решения, в противном случае. Используем полученную верхнюю оценку для построения нового отсечения. На k-й итерации будем иметь следующий усеченный параллелепипед

$$P^k = P \bigcap \bigcap_{i=1}^{k} \{x \mid f_i(x^i) + \nabla f_i^T(x^i)(x - x^i) \le 0\}.$$

Для решения задачи

$\max\{||x||^2 \mid x \in P^k\}$

снова преобразуем усеченный параллелепипед к пересечению шаров и решим двойственную задачу.

Таким образом, получим последовательность решений x^k двойственных задач. Эти решения будут стремиться к решению исходной задачи (10). Действительно, рассмотренный алгоритм решения задачи (10) строит последовательность вложенных усеченных параллелепипедов

$$P^1 \supset P^2 \supset \ldots \supset P^k \supset \ldots \supset S$$

максимум $||x||^2$ будет убывать на P^i и ограниченный снизу, поэтому $x^k \to x^*$, когда $k \to \infty$.

Разработано программное обеспечение для решения задачи канонического вида (10) к которому преобразуются рассмотренные классы задач нелинейной оптимизации. Ядром программного обеспечения является реализация эффективного прямо-двойственного метода внутренней точки. Эксперименты показали высокую эффективность этого программного обеспечения для решения многих классов задач нелинейной оптимизации.

Выводы

В данной работе классы задач нелинейной оптимизации с использованием точной квадратичной регуляризации преобразуются к каноническому виду, что позволило разработать универсальное программное обеспечение. Сравнительные численные эксперименты показали его преимущество над существующими методами и программным обеспечением для решения нелинейных оптимизационных задач.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ / REFERENCES

1. Косолап, А. И. Метод последовательного раскрытия модулей в задачах негладкой оптимизации / А. И. Косолап // Вестник Харк. нац. ун-та "Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления". – 2013. – вып. 21, № 58. – С. 77–83.

Kosolap A.I. Metod posledovatelnogo raskrutiya moduley v zadachakh negladkoy optimizatsii [The method of successive disclosures modules in non-smooth optimization problems] *Vesnik Kharkov Universitet "Matematicheskoe modelirovanie. Informatsyonnye tekhnologii. Avtomatizirovannye sistemy upravleniya – Vesnik Kharkov Univer. "Mathematical modeling. Information technology. Automated control systems"*, 2013, vol. 21, no. 58, pp. 77–83.

2. Косолап, А. И. Методы глобальной оптимизации / А. И. Косолап – Днепропетровск: Наука и образование, 2013 – 316 с.

Kosolap A.I. Metody globalnoy optimizatsii [Methods of global optimization]. Dnepropetrovsk, Nauka i obrazovanie, 2013. 316 p.

3. Косолап, А. И. Глобальная оптимизация. Метод точной квадратичной регуляризации / А. И. Косолап – Днепропетровск: ПГАСА, 2015 – 164 с.

Kosolap A.I. *Globalnaya optimizatsiya. Metod tochnoy kvadratichoy regulyarizatsii* [Global optimization. A method of exact quadratic regularization]. Dnepropetrovsk, Prydniprovskaya gosudarstvennaya akademiya stroitelstva i arkhitektury Publ., 2015. 164 p.

4. Мину, М. Математическое программирование / М. Мину; пер. с фран. А.И. Штерна. – М.: Наука, 1990.– 487 с.

Minu M. *Matematicheskoe programmirovanie* [Mathematical Programming]. Moskow, Nauka, 1990. 487 p.

5. Antoniou, A. Practical Optimization. Algorithms and Engineering Applications /A. Antoniou, Wu-Sheng Lu. – Springer, 2007. – 675 p.

Antoniou A., Lu Wu-Sheng. Practical Optimization. Algorithms and Engineering Applications. Springer Publ., 2007. 675 p.

6. Floudas, C. A. Deterministic global optimization: theory, algorithms and applications/ C. A. Floudas. – Kluwer Academic Publishers, 2000. – 57 p.

Floudas C.A. Deterministic global optimization: theory, algorithms and applications. Kluwer Academic Publishers, 2000. 57 p.

7. Floudas, C. A. A review of recent advances in global optimization / C.A. Floudas, C.E. Gounaris // J. Glob. Optim. – 2009. – v. 45, no. 1. – P. 3–38.

Floudas C.A., Gounaris C.E. A review of recent advances in global optimization. J. Glob. Optim, 2009, v. 45, no. 1. pp. 3–38.

8. Horst, R. Global Optimization: Deterministic Approaches /R. Horst, H. Tuy. – 3rd ed., Berlin: Springer–Verlag, 1996. – 727 p.

Horst R., Tuy H. Global Optimization: Deterministic Approaches– 3rd ed., Berlin, Springer–Verlag, 1996. 727 p.

9. Kenneth, V.P. Differential Evolution. A Practical Approach to Global Optimization/ V.P. Kenneth, R.M. Storn, J.A. Lampinen. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 542 p.

Kenneth V.P., Storn R.M., Lampinen J.A. Differential Evolution. A Practical Approach to Global Optimization. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2005. 542 p.

10. Liberti, L. Introduction to Global Optimization/L. Liberti. –DEI, Politecnico di Milano, Pizza L. da Vinci 32, 20133 Milano, Italy, 2006. – 42 p.

Liberti L. Introduction to Global Optimization. DEI, Politecnico di Milano, Pizza L. da Vinci 32, 20133 Milano, Italy, 2006. 42 p.

11. Luenberger, D.G. Linear and nonlinear programming / D.G. Luenberger, Y. Ye. – Springer, 2008. – 546 p.

Luenberger D.G., Ye Y. Linear and nonlinear programming. Springer Publ., 2008. 546 p.

12. Nocedal, J. Numerical optimization / J. Nocedal, S. J. Wright. – Springer, 2006. – 685 p.

Nocedal J., Wright S.J. Numerical optimization. Springer, 2006. 685 p.

13. Rao, S.S. Engineering Optimization: Theory and Practice, Fourth Edition. –John Wiley & Sone, Inc., 2009. – 829 p.

Rao S.S. Engineering Optimization: Theory and Practice, Fourth Edition. John Wiley & Sone, Inc., 2009. 829 p.

14. Sarker, R.A. Optimization Modelling. A Practical Approach/ R.A. Sarker, C.S. Newton. – Taylor & Francis Group, 2008. – 504 p.

Sarker R.A., Newton C.S. Optimization Modelling. A Practical Approach. Taylor & Francis Group, 2008. 504 p.