

**К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В РАМКАХ МОДЕЛИ  
ВОДОНАСЫЩЕННОГО ГРУНТОВОГО СЛОЯ КОНЕЧНОЙ  
ТОЛЩИНЫ.**

**А. В. Шаповал\***, к. т. н., доц., **А. С. Головки\***, к. т. н., доц.,,  
**Е. С. Титякова\***, к. т. н., **В. С. Андреев, \*\*** к. т. н., доц.

*\*ГВУЗ «Приднепровская государственная академия  
строительства и архитектуры»*

*\*\*Днепропетровский национальный университет  
железнодорожного транспорта имени акад. В. Лазаряна*

При написании настоящей статьи преследовалась цель в рамках модели упругого водонасыщенного основания получить формулы для коэффициентов (точнее, функций) влияния матрицы податливости для трех - и четырехугольных граничных элементов, а также для граничных элементов в виде кольцевого сектора [1, 2, 3].

Задача решалась в рамках расчетной схемы основания в виде слоя конечной толщины.

В рамках расчетной схемы полупространства эта проблема решена авторами [2, 3, 4].

Указанный набор граничных элементов позволяет определить напряженно – деформированное состояние грунтового основания фундаментов с практически произвольной формой подошвы.

При нахождении функций влияния для описания процесса фильтрационной консолидации нами была использована теория старения [4, 5].

Задача исследований была сформулирована так.

Граничный элемент площадью  $D$  находится на грунтовом слое толщиной  $H$ , который характеризуется упругими техническими характеристиками  $E$  и  $\nu$  (или соответствующим им упругими константами Ламе  $\lambda$  и  $G$ ), а также коэффициентом пространственной консолидации  $C_v$  [1...6].

На этот элемент действует внешняя распределенная единичная нагрузка  $q=1$ , которая остается неизменной во времени, и приложена к рассматриваемому граничному элементу в момент времени  $t=0$ .

Требуется определить функции влияния матрицы податливости  $B_{ij}(t)$  для граничных элементов в виде четырехугольника, треугольника и кольцевого сектора.

Напомним, что по определению под коэффициентом влияния понимают осадку точки основания с координатами  $(x_j, y_j)$ , обусловленной распределенной по площади некоторой геометрической фигуры (т.е. либо

четырёхугольника, либо треугольника либо кольцевого сектора и т.д.) с центром в точке с координатами  $(x_i, y_i)$  единичной нагрузкой  $q=1$  [1].

В случае водонасыщенного основания его осадки являются функциями времени. Поэтому вместо классического термина «функция влияния» следует употреблять термин «функция влияния».

Согласно [5] осадка упругого слоя толщиной  $H$  в точке с координатой  $r$  под воздействием сосредоточенной силы  $Q$  в момент времени  $t$  равна:

$$S(r,t) = \frac{1-\nu}{2 \cdot \pi \cdot G \cdot H} \cdot Q \cdot \int_0^{\infty} \left\{ \Omega(\alpha) - \frac{1-2\nu}{2 \cdot (1-\nu)} \cdot \hat{\Omega}(\alpha, t) \right\} \cdot J_0\left(\alpha \cdot \frac{r}{H}\right) \cdot d\alpha, \quad (1)$$

где

$$\Omega(\alpha) = \frac{sh^2(\alpha)}{\alpha + sh(\alpha) \cdot ch(\alpha)}; \hat{\Omega}(\alpha, t) = 4 \cdot \hat{\Omega}(\alpha) \cdot \hat{\Omega}_1(\alpha, t);$$

$$\hat{\Omega}(\alpha) = \frac{sh^2(\alpha) \cdot \alpha \cdot [1 + ch(\alpha)]^2}{[\alpha + sh(\alpha) \cdot ch(\alpha)]^2};$$

$$\hat{\Omega}_1(\alpha, t) = \sum_{i=1,3,5}^{\infty} \left\{ \frac{(i \cdot \pi)^2}{[\alpha^2 + (i \cdot \pi)^2]^2} \cdot \exp\left[-\frac{\alpha^2 + (i \cdot \pi)^2}{H^2} \cdot c_{\nu} \cdot t\right] \right\}.$$

Здесь  $Q$  - величина сосредоточенной силы;  $H$  - толщина слоя;  $G$ ,  $\nu$  и  $c_{\nu}$  - соответственно модуль сдвига, коэффициенты Пуассона и пространственной консолидации основания [2, 3];  $\alpha$  - безразмерный параметр;  $J_0(x)$  - функция Бесселя первого рода с нулевым индексом [6];  $sh(x)$  и  $ch(x)$  - соответственно гиперболические синус и косинус [6];  $r$  и  $t$  - соответственно координата и время.

Равенство (1) содержит несобственный интеграл, в силу чего его использование в качестве фундаментального решения возникают проблемы вычислительного характера. Поэтому для определения функций влияния используем полученную в работе [8] аппроксимацию (1):

$$S(r,t) = \frac{(1-\nu) \cdot Q}{2 \cdot \pi \cdot G \cdot H} \cdot \int_0^{\infty} \Omega(\alpha) \cdot J_0\left(\alpha \cdot \frac{r}{H}\right) \cdot d\alpha \approx \quad (2)$$

$$\approx \frac{(1-\nu) \cdot Q}{2 \cdot \pi \cdot G} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{10} A_i \cdot \chi_i(r) - \\ \frac{1-2 \cdot \nu}{2 \cdot (1-\nu)} \cdot \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} \sum_{m=1}^{10} \sum_{k=1}^{10} D_{ijklm} \cdot \psi_{ijklm}(r, t) \end{array} \right\}, \text{ где}$$

$$D_{ijklm} = A_i \cdot B_j \cdot C_{km}; \quad \chi(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (i-1)^2 \cdot d_a^2 \cdot H^2}};$$

$$\psi_{ijklm}(r) = \frac{\exp\left[-\frac{(2 \cdot m-1)^2 \cdot \pi^2 \cdot c_v \cdot t}{H^2}\right]}{\sqrt{r^2 + \left[(i-1) \cdot d_a + (j-1) \cdot d_b \cdot \frac{\sqrt{c_v \cdot t}}{H} + (k-1) \cdot d_m\right]^2 \cdot H^2}}$$

Здесь  $D_{ijklm} = A_i, B_j, C_{km}, d_a, d_b$  и  $d_m$  - полученные в работе [8] коэффициенты и константы аппроксимации.

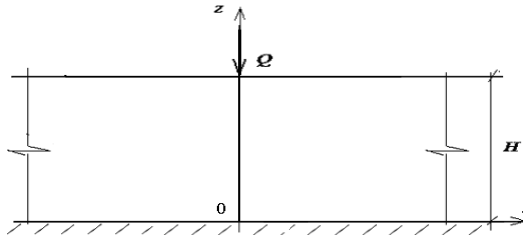


Рис. 1. Расчетная схема слоя конечной толщины.

Вначале рассмотрим случай прямоугольного граничного элемента с размерами сторон  $L$  и  $B$ , на который действует распределенная нагрузка  $q = 1$  (рис. 2).

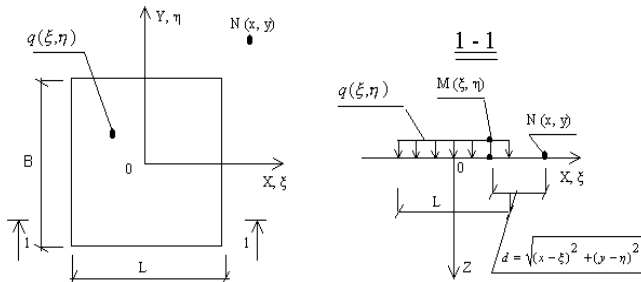


Рис. 2. К определению коэффициента влияния матрицы податливости для прямоугольного граничного элемента.

Найдем осадку дневной поверхности  $S^*(x,y)$  точки основания с координатами  $(x,y)$  от элементарной нагрузки  $dQ(\xi,\eta) = q \cdot d\xi \cdot d\eta$ , приложенной в точке с координатами  $(\xi,\eta)$  (см. рис. 2). В этом случае в формуле (2) радиус следует положить равным  $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$  и проинтегрировать полученное выражение по координате  $\xi$  в пределах от  $-\frac{L}{2}$  до  $+\frac{L}{2}$ . Кроме того, полученный таким образом результат следует проинтегрировать полученное выражение по координате  $\eta$  в пределах от  $-\frac{b}{2}$  до  $+\frac{b}{2}$  (см. рис. 2). Имеем:

$$S(x,y) \approx \frac{(1-\nu) \cdot q}{2 \cdot \pi \cdot G} \cdot \left. \begin{array}{l} + \frac{L-b}{2} \int \int \left\{ \sum_{i=1}^{10} A_i \cdot \chi_i^*(x,y,\xi,\eta) - \frac{1-2 \cdot \nu}{2 \cdot (1-\nu)} \cdot \right. \\ \left. - \frac{L-b}{2} \int \int \left\{ \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} \sum_{m=1}^{10} \sum_{k=1}^{10} D_{ijkl} \cdot \psi_{ijkl}^*(x,y,\xi,\eta,t) \right\} \cdot d\xi \cdot d\eta \right\} \end{array} \right\} \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (3)$$

$$\text{где } \chi_i^*(x,y,\xi,\eta) = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (i-1) \cdot d_a^2 \cdot H^2}};$$

$$\psi_{ijkl}^*(x,y,\xi,\eta,t) = \frac{z_i(t)}{zn(x,y,\xi,\eta,t)};$$

$$z_i(t) = \exp \left[ - \frac{(2 \cdot m - 1)^2 \cdot \pi^2 \cdot c_v \cdot t}{H^2} \right];$$

$$zn(x,y,\xi,\eta,t) = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + \left[ (i-1) \cdot d_a + (j-1) \cdot d_b \cdot \frac{\sqrt{c_v \cdot t}}{H} + (k-1) \cdot d_m \right]^2 \cdot H^2}$$

Далее определим функции влияния матрицы податливости метода граничных элементов  $B_{ij}(t)$ . В рассматриваемом случае с физической точки зрения функция влияния матрицы податливости  $B_{ij}(t)$  является осадкой точки основания с координатами  $(x_j, y_j)$ , обусловленной распределенной по площади прямоугольника с размерами сторон в плане  $b_i$  и  $L_i$  и центром в точке с координатами  $(x_i, y_i)$  единичной нагрузкой  $q=1$  в момент времени  $t$ .

Поместим центр загруженной области в точку с координатами  $(x_i, y_i)$  и найдем осадку точки с координатами  $(x_j, y_j)$ . При этом примем размеры загруженной области равными  $b_i$  и  $L_i$ , а распределенную нагрузку  $q$  равной единице. Кроме того, положим нагрузку неизменной во времени. Имеем:

$$B_{ij}(t) \approx \frac{(1-\nu)}{2 \cdot \pi \cdot G} \cdot \left. \begin{array}{l} + \frac{L}{2} - \frac{b}{2} \\ \int_0^L \int_0^b \\ - \frac{L}{2} - \frac{b}{2} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \sum_{i_1=1}^{10} A_{i_1} \cdot \chi_{i_1}^*(i, j, \xi, \eta) - \frac{1-2 \cdot \nu}{2 \cdot (1-\nu)} \cdot \\ \sum_{i_1=1}^{10} \sum_{j_1=1}^{10} \sum_{m=1}^{10} \sum_{k=1}^{10} D_{i_1 j_1 k m} \cdot \psi_{i_1 j_1 k m}^*(i, j, \xi, \eta, t) \end{array} \right\} \cdot d\xi \cdot d\eta$$

где

$$\chi_{i_1}^*(i, j, \xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{(x_i - x_j - \xi)^2 + (y_i - y_j - \eta)^2 + (i_1 - 1)^2 \cdot d_a^2 \cdot H^2}}; \quad (4)$$

$$\psi_{i_1 j_1 k m}^*(i, j, \xi, \eta, t) = \frac{z_i(t)}{zn(i, j, \xi, \eta, t)}; \quad z_i(t) = \exp \left[ -\frac{(2 \cdot m - 1)^2 \cdot \pi^2 \cdot c_v \cdot t}{H^2} \right];$$

$$zn(i, j, \xi, \eta, t) = \sqrt{(x_i - x_j - \xi)^2 + (y_i - y_j - \eta)^2 + \left[ (i_1 - 1) \cdot d_a + (j_1 - 1) \cdot d_b \cdot \frac{\sqrt{c_v \cdot t}}{H} + (k - 1) \cdot d_m \right]^2 \cdot H^2}$$

Интегралы (4) для каждого момента времени  $t$  целесообразно вычислять методом трапеций [9]. При этом первый интеграл по переменной  $\eta$  вычислялся аналитически.

В случае **треугольного граничного элемента** (рис. 3) функция влияния матрицы податливости  $B_{ij}(t)$  с физической точки зрения является осадкой точки основания с координатами  $(x_j, y_j)$ , которая обусловлена единичной постоянной во времени нагрузкой  $q=1$ , распределенной по площади треугольника с координатами вершин  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  и центром в точке с координатами  $(x_i, y_i)$  в момент времени  $t$ .

Техника определения функций влияния в целом такая же, как и для прямоугольного элемента. Отличие заключается в том, что в данном случае верхний и нижний пределы интегрирования по переменной  $\eta$  являются функциями координаты  $\xi$ , т.е.

$$\eta_1 = [U(\xi - x_1) - U(\xi - x_3)] \cdot \left[ y_1 + \frac{(y_3 - y_1) \cdot (\xi - x_1)}{x_3 - x_1} \right] \text{ и}$$

$$\eta_2 = [U(\xi - x_1) - U(\xi - x_2)] \cdot \left[ y_1 + \frac{(y_2 - y_1) \cdot (\xi - x_1)}{x_2 - x_1} \right] + [U(\xi - x_2) - U(\xi - x_3)] \cdot \left[ y_2 + \frac{(y_3 - y_2) \cdot (\xi - x_2)}{x_3 - x_2} \right], \quad (5)$$

где  $U(x)$  - ступенчатая единичная функция Хевисайда [7], а  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  и  $(x_3, y_3)$  – координаты вершин треугольника (т.е. загруженной области), причем  $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ .

В связи с изложенным имеем:

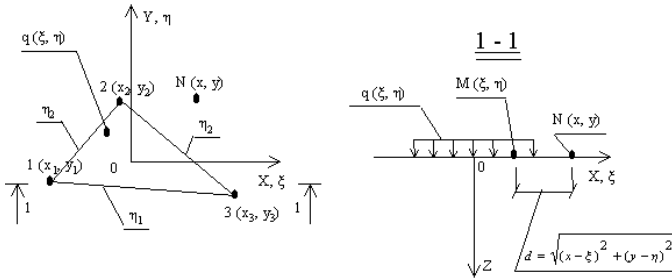


Рис. 3. К определению коэффициента влияния матрицы податливости треугольного граничного элемента.

$$B_{ij}(t) \approx \frac{(1-\nu)}{2 \cdot \pi \cdot G} \cdot \left. \begin{array}{l} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{x_1}^{x_3} \left\{ \sum_{i_1=1}^{10} A_{i_1} \cdot \chi_{i_1}^*(i, j, \xi, \eta) - \frac{1-2 \cdot \nu}{2 \cdot (1-\nu)} \cdot \right. \\ \left. \sum_{i_1=1}^{10} \sum_{j_1=1}^{10} \sum_{m=1}^{10} \sum_{k=1}^{10} D_{i_1 j_1 k m} \cdot \psi_{i_1 j_1 k m}^*(i, j, \xi, \eta, t) \right\} \cdot d\xi \cdot d\eta \end{array} \right\} \quad (6)$$

где  $A_{i_1}$  и  $D_{i_1 j_1 k m}$  - см. пояснения к формуле (2), а  $\chi_{i_1}^*(i, j, \xi, \eta)$  и  $\psi_{i_1 j_1 k m}^*(i, j, \xi, \eta, t)$  - см. пояснения к формуле (4).

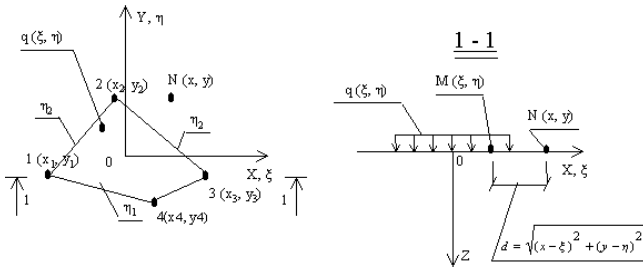
В заключение отметим, что если  $y_2 < y_1$  (см. рис. 6), то интегралы (6) следует либо умножить на (-1) либо поменять местами пределы интегрирования  $\eta_1$  и  $\eta_2$ .

Для граничного элемента в виде неправильного многоугольника (рис. 4; такие элементы используются с вычислительных комплексах «Лира» и «Мономах») коэффициенты влияния матрицы податливости  $B_{ij}$  найдем в виде:

$$B_{ij}(t) \approx \frac{(1-\nu)}{2 \cdot \pi \cdot G} \cdot \frac{\eta_2 x_3}{\eta_1 x_1} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i_1=1}^{10} A_{i_1} \cdot \chi_{i_1}^*(i, j, \xi, \eta) - \frac{1-2 \cdot \nu}{2 \cdot (1-\nu)} \cdot \\ \sum_{i_1=1}^{10} \sum_{j_1=1}^{10} \sum_{m=1}^{10} \sum_{k=1}^{10} D_{i_1 j_1 k m} \cdot \psi_{i_1 j_1 k m}^*(i, j, \xi, \eta, t) \end{array} \right\} \cdot d \xi \cdot d \eta \quad (7)$$

где  $A_{i_1}$  и  $D_{i_1 j_1 k m}$  - см. пояснения к формуле (2), а  $\chi_{i_1}^*(i, j, \xi, \eta)$  и  $\psi_{i_1 j_1 k m}^*(i, j, \xi, \eta, t)$  - см. пояснения к формуле (4).

$$\begin{aligned} \text{Здесь } \eta_1 &= [U(\xi-x_1)-U(\xi-x_4)] \cdot \left[ y_1 + \frac{(y_4-y_1) \cdot (\xi-x_1)}{x_4-x_1} \right] + \\ &+ [U(\xi-x_4)-U(\xi-x_3)] \cdot \left[ y_4 + \frac{(y_3-y_4) \cdot (\xi-x_4)}{x_3-x_4} \right] \\ \text{и } \eta_2 &= [U(\xi-x_1)-U(\xi-x_2)] \cdot \left[ y_1 + \frac{(y_2-y_1) \cdot (\xi-x_1)}{x_2-x_1} \right] + \\ &+ [U(\xi-x_2)-U(\xi-x_3)] \cdot \left[ y_2 + \frac{(y_3-y_2) \cdot (\xi-x_2)}{x_3-x_2} \right], \quad x_1 \leq x_2 \leq x_4 \leq x_3. \end{aligned}$$



**Рис. 4.** К определению коэффициента влияния матрицы податливости для граничного элемента в виде неправильного многоугольника.

С физической точки зрения в рассматриваемом случае функция влияния матрицы податливости  $B_{ij}(t)$  является осадкой точки основания с координатами  $(x_j, y_j)$ , обусловленной распределенной по площади четырехугольника с координатами вершин  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$ ,  $(x_4, y_4)$  и центром в точке с координатами  $(x_i, y_i)$  единичной постоянной во времени нагрузкой  $q$ .

Для граничного элемента в виде **кольцевого сектора** при определении коэффициентов влияния матрицы податливости  $B_{ij}$  следует перейти от декартовой к полярной системе координат (рис. 5).

В данном случае под коэффициентом влияния следует понимать осадку точки М, положение которой определяется вектором длиной  $b$ , наклоненным к горизонтали под углом  $\beta$  под воздействием распределенной по площади кольцевого сектора abcd единичной постоянной во времени нагрузки. При этом положение центра граничного элемента abcd определяется вектором длиной  $\rho$ , наклоненным к горизонтали под углом  $\varphi$ , а расстояние между центром граничного элемента и точкой М равно:

$$r = \sqrt{\rho^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot \rho \cdot \cos(\varphi)}. \quad (8)$$

Далее подставим (8) в (2) и проинтегрируем полученное таким образом выражение в по координате  $\rho$  в пределах от  $R1, j$  до  $R2, j$ , а по координате

$\varphi$  - в пределах от  $\varphi_{1, j}$  до  $\varphi_{2, j}$ . Имеем:

$$B_{ij}(t) \approx \frac{(1-\nu)}{2 \cdot \pi \cdot G} \int_{\varphi_{1, j}}^{\varphi_{2, j}} \int_{R1, j}^{R2, j} \left\{ \sum_{i_1=1}^{10} A_{i_1} \cdot \chi_{i_1}^{**}(i, j, \rho, \varphi) - \frac{1-2 \cdot \nu}{2 \cdot (1-\nu)} \cdot \sum_{i_1=1}^{10} \sum_{j_1=1}^{10} \sum_{m=1}^{10} \sum_{k=1}^{10} D_{i_1 j_1 k m} \cdot \psi_{i_1 j_1 k m}^{**}(i, j, \rho, \varphi, t) \right\} \cdot d\xi \cdot d\eta, \quad (9)$$

где  $A_{i_1}$  и  $D_{i_1 j_1 k m}$  - см. пояснения к формуле (2); (9)

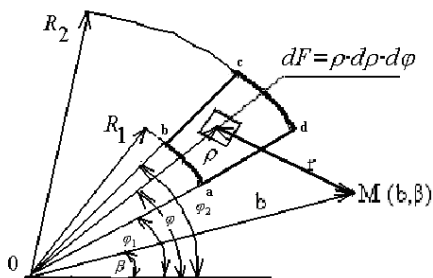
$$\chi_{i_1}^{**}(i, j, \rho, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + b_i^2 - 2 \cdot b_i \cdot \rho \cdot \cos(\varphi) + [(k-1) \cdot d_a \cdot H]^2}};$$

$$\psi_{i_1 j_1 k m}^{**}(i, j, \rho, \varphi, t) = \frac{z i^*(t)}{z n^*(i, j, \rho, \varphi, t)}; \quad z i^*(t) = \exp\left[-\frac{(2 \cdot m - 1)^2 \cdot \pi^2 \cdot c_v \cdot t}{H^2}\right];$$

$$z n^*(i, j, \rho, \varphi, t) = \sqrt{\rho^2 + b_i^2 - 2 \cdot b_i \cdot \rho \cdot \cos(\varphi) + \left[ (i_1 - 1) \cdot d_a + (j_1 - 1) \cdot d_b \cdot \frac{\sqrt{c_v \cdot t}}{H} + (k - 1) \cdot d_m \right]^2 \cdot H^2}.$$

Интегралы (9) целесообразно вычислять методом трапеций [9]. При этом первый интеграл по переменной  $\rho$  целесообразно вычислять аналитически.





**Рис. 5.** К определению коэффициента влияния матрицы податливости для граничного элемента в виде кольцевого сектора.

В целом, полученные в ходе выполнения настоящей работы коэффициенты влияния матрицы податливости метода граничных элементов в рамках модели основания в виде линейного упругого изотропного водонасыщенного слоя конечной толщины решать такие задачи проектирования:

- определение напряженно – деформированного состояния грунтовых оснований, находящихся под воздействием приложенной к их верхней границе распределенной нагрузки;
- определение напряженно – деформированного состояния систем «грунтовое основание – фундамент»;
- определение напряженно – деформированного состояния систем «грунтовое основание – фундамент – надфундаментное строение».

### Использованная литература

1. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. – М.: Мир, 1987. – 328 с.
2. Шаповал А.В. Алгоритм расчета напряженно-деформированного состояния обладающих свойством ползучести водонасыщенных грунтовых оснований методом граничных элементов// Будівельні конструкції: Міжвідомчий науково-технічний збірник. – Вип. 65.-К.: НДІБК, 2006.-С. 305-310.
3. Шаповал А.В., Шаповал В.Г., Капустин В.В. Метод граничных элементов в задачах определения НДС водонасыщенных грунтовых оснований, обладающих свойством ползучести. // Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту ім. Акад. В. Лазаряна. - Вип.14.- Дніпропетровськ: вид ДНУЗТ, 2007. – С. 220-224.
4. Шаповал А. В. Особливості взаємодії водонасичених основ, що мають властивість повзучості, з будинками і спорудами. Автореферат кандидатської дисертації. - Дніпропетровськ, ПДАБА, 2007 - 24 с.
5. Новацкий В. Теория упругости. - М.: Мир, - 1975. - 872 с.
6. Зарецкий Ю.К. Теория консолидации грунтов. - М.: Наука. 1967 - 270 с.
7. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике. - М.: Наука, 1974. - 840 с.
8. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. - М.: Наука, 1966. - 664 с.