УДК 519.85

УТОЧНЕНИЕ ОЦЕНОК РЕШЕНИЙ В ПОЛУОПРЕДЕЛЕННОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

КОСОЛАП А. И., *д. физ-мат. н., проф.*

Кафедра специализированных компьютерных систем, Государственное высшее учебное заведение «Украинский государственный химико-технологический университет», ул. Набережная Победы, 40, 49005, Днепропетровск, Украина, тел. +38 (0562) 7535726, e-mail: anivkos@ua.fm, ORCID ID: 0000-0001-73386707.

Аннотация. ***Цель.*** Разработать новые методы для решения оптимизационных моделей сложных систем. Такие модели возникают в технике, искусственном интеллекте, проектировании, построении и управлении сложными системами. Решение таких оптимизационных задач являются является сложной вычислительной проблемой. Задача состоит в том, чтобы разработать эффективные методы для решения таких классов. ***Методика.*** В работе предлагается преобразовывать рассмотренные классы задач к задачам полуопределенного программирования и использовать их решения в прямо-двойственных методах внутренней точки. Предлагается итерационная процедура модификации соответствующей задачи полуопределенного программирования, позволяющая находить точные решения исходной задачи. ***Результаты.*** Для решения задач квадратичной оптимизации используется полуопределенная релаксация и прямо-двойственный метод внутренней точки. Строится итерационная процедура модификации задач полуопределенного программирования, позволяющая получать точное решение исходной задачи. Полученные результаты подтверждаются численными экспериментами. ***Научная новизна.*** Разработана новая методология решений сложных оптимизационных задач, которая использует полуопределенную релаксацию. Предлагается последовательная модификация задач полуопределенной оптимизации. ***Практическая значимость.*** Рассмотренная методика решения сложных задач квадратичной оптимизации реализована в виде программного обеспечения. Сравнительные эксперименты подтверждают эффективность данной методики при решении классов задач квадратичной оптимизации.

Ключевые слова: сложные системы, полуопределенная релаксация, квадратичные задачи, прямо-двойственный метод внутренней точки, модификация задач полуопределенного программирования.

УТОЧНЕННЯ ОЦІНОК РОЗВ'ЯЗКІВ В НАПІВВИЗНАЧЕНОМУ ПРОГРАМУВАННІ

КОСОЛАП А. І., *д. фіз-мат. н., проф.*

Кафедра спеціалізованих комп'ютерних систем, Державний вищий навчальний заклад «Український державний хіміко-технологічний університет», вул. Набережна Перемоги, 40, 49005, Дніпропетровськ, Україна, тел. +38 (0562) 7535726, e-mail: anivkos@ua.fm, ORCID ID: 0000-0001-73386707.

Анотація. ***Мета.*** Розробити нові методи для розв'язування оптимізаційних моделей складних систем. Такі моделі виникають в техніці, штучному інтелекті, проектуванні, побудові та управлінні складними системами. Розв'язування таких оптимізаційних задач є складною обчислювальною проблемою. Завдання полягає в тому, щоб розробити ефективні методи для розв'язування таких класів задач. ***Методика.*** У роботі пропонується перетворювати розглянуті класи задач до задач напіввизначеного програмування і використовувати їх розв'язки в прямо-двоїстих методах внутрішньої точки. Пропонується ітераційна процедура модифікації відповідної задачі напіввизначеного програмування, що дозволяє знаходити точні розв'язки вихідної задачі. ***Результати.*** Для розв'язування задач квадратичної оптимізації використовується напіввизначена релаксація і прямо-двоїстий метод внутрішньої точки. Будується ітераційна процедура модифікації задач напіввизначеного програмування, що дозволяє отримувати точні розв'язки вихідної задачі. Отримані результати підтверджуються чисельними експериментами. ***Наукова новизна.*** Розроблено нову методологію знаходження розв'язків складних оптимізаційних задач, яка використовує напіввизначену релаксацію. Пропонується послідовна модифікація задач напіввизначеної оптимізації. ***Практична значимість***. Розглянута методика розв'язування складних задач квадратичної оптимізації реалізована у вигляді програмного забезпечення. Порівняльні експерименти підтверджують ефективність даної методики при розв'язуванні класів задач квадратичної оптимізації.

Ключові слова: складні системи, напіввизначена релаксація, квадратичні задачі, прямо-двоїстий метод внутрішньої точки, модифікація задач напіввизначеного програмування.

IMPROVEMENT OF THE ESTIMATIONS OF SOLUTIONS IN THE SEMIDEFINITE PROGRAMMIN

KOSOLAP A. I., *Dr. Sc. (Phys.-Math.), Prof.*

Department of specialized computer systems, State Higher Education Establishment “Ukrainian State University of Chemical Technology”, 40, Naberezhna Peremogy str., Dnipropetrovsk 49005, Ukraine, tel. +38 (0562) 7535726, e-mail: anivkos@ua.fm, ORCID ID: 0000-0001-73386707

Abstract. ***Purpose.*** We develop new methods for solving optimization models of complex systems. Such models arise in technology, artificial intelligence, design, construction and management of complex systems. Solving such optimization problems is a complex computational problem. This problem is to develop effective methods for solving such classes. ***Methodology.*** In this paper, we propose to transform the classes of problems to problems of semidefinite programming and to use their solutions for primer-dual interior point methods. We propose an iterative procedure for modifying the corresponding problem of semidefinite programming, which makes it possible to find exact solutions of the original problem. ***Findings.*** To solve the problems of quadratic optimization, semi-definite relaxation and a direct-dual method of the interior point are used. An iterative procedure for modifying semidefinite programming problems is constructed, which makes it possible to obtain an exact solution of the original problem. The obtained results are confirmed by numerical experiments. ***Originality.*** A new methodology for solving complex optimization problems that arise in modeling complex systems using semidefinite relaxation is developed. A sequential modification of the problems of semidefinite optimization is proposed. ***Practical value.*** We considered technique for solving complex quadratic optimization problems is realized in the form of software. Comparative experiments confirm the effectiveness of this technique in solving classes of problems of quadratic optimization.

Keywords: complex systems, semidefinite relaxation, quadratic problems, primer-dual interior point method, modification of semidefinite programming problems.

Постановка проблемы

При проектировании сложных систем в технике, управлении технологическими процессами, экономике, финансах, информатике, искусственном интеллекте и многих других областях у разработчиков возникает множество альтернативных решений. Для выбора наилучших решений строятся оптимизационные модели этих сложных систем. Такие модели содержат большое число переменных, значения которых необходимо определить проектировщику сложной системы при наличии множества ограничений на эти переменные. Очень часто полученная оптимизационная модель содержит много экстремумов, из которых необходимо выбрать наилучший по значению выбранного критерия. Численное решение такой задачи представляет известную проблему [1,4-6]. Большинство детерминированных методов, так или иначе, исследуют всю допустимую область переменных модели для поиска наилучшего решения. Однако уже для размерностей (числе переменных) больше 20 возникают проблемы, связанные с временем вычисления оптимального решения и памяти для хранения промежуточных данных. Время решения задачи растет экспоненциально при увеличении числа переменных задачи. Однако в реальном проектировании сложных систем число переменных может достигать десятки и сотни тысяч, а также иметь большое число ограничений. Для решения таких задач были предложены генетические, эволюционные и другие алгоритмы, которые используют случайный поиск [7]. Эти алгоритмы иногда позволяют получать хорошие решения близкие к оптимальным, но часто эти решения далеки от оптимальных. Все это способствует поиску новых методов для решения сложных оптимизационных задач.

Анализ последних достижений

Наиболее плодотворной идеей в численной глобальной оптимизации является выпуклая релаксация. Такая релаксация позволяет преобразовать сложную задачу оптимизации к выпуклой. Для нахождения решений в выпуклых нелинейных оптимизационных моделях в последнее время широко используется прямо-двойственный метод внутренней точки [8]. Этот метод имеет полиномиальную сложность и используется для решения задач больной размерности. Он может использоваться и при решении многоэкстремальных задач. При удачном выборе начальных значений переменных этот метод позволяет получить наилучшее решение, однако нет эффективных алгоритмов для проверки того, что найденное решение наилучшее.

Для преобразования многоэкстремальных задач к выпуклым используются двойственные методы [7], полуопределенная релаксация [2], reformulation-linearization техника [9] и другие преобразования. При определенных условиях решение релаксационной задачи совпадает с решением исходной задачи. Однако в общем случае, решение релаксационных задач позволяет найти только оценку решения исходной задачи. Для уточнение полученных решений предлагаются различные модификации выпуклых релаксаций, но это позволяет только незначительно увеличить класс эффективно решаемых задач. Новый подход, который предлагается в данной статье использует введение дополнительных ограничений для уточнения решений в полуопределенном программировании.

Цель

Предложить преобразования в задачах полуопределенного программирования, которые позволять получать более точные оценки решений в сложных оптимизационных задачах.

Постановка задачи и ее решение

Рассмотрим задачу оптимизации

$$\min\{ f_0(x) \mid f_i(x) \le 0, i = 1,\dots,m, x \in E^n\}, \quad (1)$$

где все функции $f_i(x) = x^T A_i x + b_i^T x + c_i$ – квадратичные, b_i, x – векторы n-мерного евклидового пространства E^n, c_i – константы, а все матрицы A_i – симметричные. Если все матрицы A_i положительно полуопределенные, то задача (1) будет выпуклой и для ее решения могут быть использованы эффективные методы локальной оптимизации. Допустим, что решение задачи (1) существует. Для этого достаточно, чтобы функция $f_0(x)$ была непрерывна, а допустимое множество задачи (1) было компактно.

Покажем, как другие классы задач нелинейной оптимизации преобразуются к виду (1).

Задача с булевыми переменными

$$\min\{ f_0(x) \mid f_i(x) \le 0, i = 1,\dots,m, x = 0 \vee 1\}$$

эквивалентна задаче (1) после преобразования

$$\min\{ f_0(x) \mid f_i(x) \le 0, i = 1,\dots,m,$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_j(1-x_j)^2 \le 0, 0 \le x \le 1\}.$$

где ограничениям

$$\sum_{i=1}^{n} x_j(1-x_j)^2 \le 0, 0 \le x \le 1$$

удовлетворяют только булевые переменные.

Используем полуопределенную релаксацию [10] для решения квадратичной задачи (1). Она позволяет преобразовать квадратичную функцию $x^T Ax$ к виду $A \bullet xx^T$ или $A \bullet X$, где A – симметричная матрица, X – положительно полуопределенная матрица ранга единица, а $A \bullet X$ – скалярное произведение матриц

$$A \bullet X = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij}.$$

Таким образом, квадратичное выражение сводится к линейному относительно матрицы X. Получим следующую задачу полуопределенной оптимизации для задачи квадратичного программирования (1):

$$\min\left\{ \begin{matrix} \overline{A}_0 \bullet X \mid \overline{A}_i \bullet X \le 0, \ i = 1,\dots,m, \\ I \bullet X = 1, X \succeq 0 \end{matrix} \right\}, \quad (2)$$

где

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & x^T \\ x & xx^T \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\overline{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b_0^T}{2} \\ \frac{b_0}{2} & A_0 \end{pmatrix}, \quad \overline{A}_i = \begin{pmatrix} -c_i & \frac{b_i^T}{2} \\ \frac{b_i}{2} & A_i \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Опустим условие положительной полуопределенности матрицы X в задаче (2), используем (3)-(5) для преобразования задачи (1) к полуопределенной оптимизации (2) и будем ее решать полуопределенным симплекс-методом [2] (положительная полуопределенность матрицы X определяется симплекс-методом). Если полученная матрица X будет иметь ранг единица, то полученное решение задачи (2) является глобальным минимумом задачи (1). Если ранг матрицы X будет больше единицы, то мы получили нижнюю оценку решения задачи (1) (эта оценка может быть точной, но проверка этой точности является сложной задачей). Тогда продолжим решать начальную задачу (1) методом внутренней точки для локальной оптимизации, используя в качестве начальной точки полученное решение задачи (2). Таким образом, получим верхнюю оценку решения задачи (1). Если верхняя и нижняя оценка значения целевой функции задачи (1) совпадают, то ее решение найдено.

Обозначим через x^0 –нижнюю оценку решения задачи (1), полученную решением задачи полуопределенной оптимизации (2). Рассмотрим новую задачу

$$\min\{ z^2 \mid f_0(x) \ge f_0(x^0) + h, \ f_0(x) + s \le z^2,$$
$$f_i(x) \le 0, i = 1,\dots,m\}, \quad (6)$$

где значение s удовлетворяет условию

$$f_0(x^*) + s \ge \| x^* \|^2,$$

x^* – решение задачи (1), а $h \in (0, 1]$. Очевидно, что точка x^0 не удовлетворяет ограничением задачи (6). Преобразуем задачу (6) к задаче полуопределенной оптимизации

$$\min\left\{\begin{matrix} C \bullet Y \mid B_j \bullet Y \le 0,\ j=1,2,\ \overline{A}_i \bullet Y \le 0, \\ i=1,\dots,m,\ I \bullet Y = 1, Y \succeq 0 \end{matrix}\right\}, \quad (7)$$

где Y – матрица размера $(n+1)\times(n+1)$, а матрицы B_j равны

$$B_1 = \begin{pmatrix} -f_0(x^0)-h & -\frac{b_0^T}{2} & 0 \\ -\frac{b_0}{2} & -A_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} s & \frac{b_0^T}{2} & 0 \\ \frac{b_0}{2} & -A_0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение задачи (7) используем в качестве начальной точки для решения задачи (1) прямо-двойственным методом внутренней точки. Получим лучшую оценку решения задачи (1). Этот процесс может быть продолжен до тех пор, пока верхняя оценка решения задачи (1) будет убывать. Численные эксперименты показывают, что такая верхняя оценка часто совпадает с точным решением задачи (1).

Рассмотрим следующий пример

$$\min\{\| x\|^2 \mid -4x_1^2+5x_1+2x_2^2-6x_2 \le -10,$$
$$-2x_1^2-8x_1-4x_2^2+6x_2 \le -5\}. \quad (8)$$

В этой задаче 3 локальных минимума. Преобразуем ее к задаче полуопределенной оптимизации

$$\min\left\{C \bullet X \mid A_i \bullet X \le 0,\ i=1,2,\ I \bullet X = 1, X \succeq 0\right\}, \quad (9)$$

где

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 10 & 2,5 & -3 \\ 2,5 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 \\ -4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Решаем задачу (9) полуопределенным симплекс-методом, получим следующее решение

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0,16963 & 0,226382 \\ 0,16963 & 2,3981 & 0,040149 \\ 0,22638 & 0,04015 & 0,051265 \end{pmatrix}$$

Данная матрица X имеет ранг 2, поэтому соответствующее решение x = (0,16963; 0,226382) будет нижней оценкой решения задачи (9). Преобразуем задачу (9) к задаче (7), где

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 10 & 2,5 & -3 & 0 \\ 2,5 & -4 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решаем соответствующую задачу (7) полуопределенным симплекс-методом, получаем решение

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -0,356164 & -0,315068 & 0 \\ -0,356164 & 2,68493 & 0 & 0 \\ -0,315068 & 0 & 3,315068 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Используем найденную точку

x^0 = (-0,356164; -0,315068)

в качестве начальной для решения задачи (8) прямо-двойственным методом внутренней точки. Получим решение x^* = (-1,69566; -1,190667) задачи (8), которое является точкой ее глобального минимума. Эта методика позволила находить точные решения и в других задачах (1) большей размерности.

Научная новизна и практическая значимость

Разработана новая методика для численного решения оптимизации сложных систем. Эта методика использует полуопределенную релаксацию исходной задачи и прямо-двойственный метод внутренней точки. Это позволяет получить нижнюю и верхнюю оценку решения исходной задачи. Затем соответствующая задача полуопределенного программирования модифицируется посредством добавления новых отсекающих ограничений. Преобразованная задача позволяет получить более точную нижнюю, а затем и верхнюю оценку решения исходной задачи. Использование этой итерационной процедуры часто позволяет находить точное решение исходной задачи.

Новая методика может быть использована при проектировании сложных систем в различных прикладных областях.

Выводы

В данной работе задачи квадратичной оптимизации с использованием полуопределенной релаксации преобразуются к задачам полуопределенного программирования, для которых разработаны эффективные методы решения. Полученное решение задачи полуопределенного программирования уточняется прямо-двойственным методом внутренней точки. Затем задача полуопределенной оптимизации модифицируется и снова решается исходная задача квадратичной оптимизации для новой начальной точки. Такая итерационная процедура позволяет часто находить точное решение исходной задачи, что подтверждается численными экспериментами.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Косолап, А. И. Методы глобальной оптимизации / А. И. Косолап – Днепропетровск: Наука и образование, 2013 – 316 с.
2. Косолап А. И. Полуопределенное программирование и его приложения /А.И. Косолап, А.С. Перетятько. – Днепр, ПГАСА, 2018. – 148 с.
3. Dur M. Duality in Global Optimization: Optimality Conditions and Algorithmical Aspects /M. Dur. – Shaker Verlag, 1999. – 117 p.
4. Floudas, C. A. Deterministic global optimization: theory, algorithms and applications/ C. A. Floudas. – Kluwer Academic Publishers, 2000. – 57 p.
5. Floudas, C. A. A review of recent advances in global optimization / C.A. Floudas, C.E. Gounaris // J. Glob. Optim. – 2009. – v. 45, no. 1. – P. 3–38.
6. Horst, R. Global Optimization: Deterministic Approaches /R. Horst, H. Tuy. – 3rd ed., Berlin: Springer–Verlag, 1996. – 727 p.
7. Kenneth, V.P. Differential Evolution. A Practical Approach to Global Optimization/ V.P. Kenneth, R.M. Storn, J.A. Lampinen. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 542 p.
8. Nocedal, J. Numerical optimization / J. Nocedal, S. J. Wright. – Springer, 2006. – 685 p.
9. Sherali H. D. A Reformulation-Linearization Technique for Solving Discrete and Continuous Nonconvex Problems / H. D. Sherali, W. P. Adams. – Springer, 2010. – 518 p.
10. Ye Y. Semidefinite programming / Y. Ye. – Stanford: Stanford University, 2003. – 161 p.

REFERENCES

1. Kosolap A.I. *Metody globalnoy optimizatsii* [Methods of global optimization]. Dnipropetrovsk, Nauka i obrazovanie Publ., 2013, 316 p. (in Russian).
2. Kosolap A.I. and Peretiatko A.S. *Poluopredelennoe programmirovanie i ego prilozheniya* [Semidefinite programming and its applications]. Dnepr, PGASA, 2018, 148 p. (in Russian).
3. Dur M. *Duality in Global Optimization: Optimality Conditions and Algorithmical Aspects* /M. Dur. – Shaker Verlag, 1999, – 117 p.
4. Floudas, C.A. *Deterministic global optimization: theory, algorithms and applications*. Kluwer Academic Publishers, 2000, 57 p.
5. Floudas, C.A. and Gounaris C.E. *A review of recent advances in global optimization*. J. Glob. Optim., 2009, v. 45, no. 1. pp. 3–38.
6. Horst, R. and Tuy H. *Global Optimization*: Deterministic Approaches. 3rd ed., Berlin, Springer–Verlag, 1996, 727 p.
7. Kenneth, V.P., Storn R.M. and Lampinen J.A. *Differential Evolution*. *A Practical Approach to Global Optimization*. Berlin Heidelberg, Springer-Verlag, 2005, 542 p.
8. Nocedal, J. and Wright S. J. *Numerical optimization*. Springer, 2006, 685 p.
9. Sherali H. D. and Adams W. P. *A Reformulation-Linearization Technique for Solving Discrete and Continuous Nonconvex Problems*. Springer Publ., 2010, 518 p.
10. Ye Y. *Semidefinite programming*. Stanford, Stanford University, 2003, 161 p.