

**РАЗРАБОТКА МЕТОДА ПОЛУАВТОМАТИЧЕСКОГО
МОДЕЛИРОВАНИЯ УПРАВЛЯЕМОСТИ АВТОПОЕЗДОВ. ЧАСТЬ I.**

Актуальность проблемы. Транспортное средство (ТС) должно обеспечивать стабильные эксплуатационные свойства в диапазоне рабочих скоростей движения, а также удовлетворять высоким требованиям безопасности. Исследование динамики движения ТС становится приоритетным направлением, требующим эффективного системного моделирования; причем имитационные модели должны базироваться на принципе автоматического построения. Последнее, в свою очередь, основывается на развитии алгоритмов математического моделирования и прикладного программного обеспечения. Таким образом, автоматизация составления динамических моделей транспортных средств составляет актуальную научно-практическую задачу автомобилестроительной отрасли.

Анализ исследований. Несколько десятилетий исследовательской работы ведущих специалистов, таких как Д.Р. Эллис [4], Н.В. Рачејка [1], Р.В. Zegelaar, Т.Д. Gillispie, М. Gipser [8], в области динамики автомобиля способствовали созданию метода генерации высокоточных динамических моделей автомобилей и полуэмпирических моделей шин. Интеграция их с современными IT-технологиями позволяет не только заменять дорогостоящие натурные эксперименты, получать результаты, максимально приближенные к реальным [1, 2, 8], но и создать целый сектор экономической деятельности.

Постановка задачи. При увеличении числа степеней свободы моделей ТС составление уравнений движения «вручную» по Лагранжу [4] имеет основные недостатки: емкость времени, вероятность ошибки, не универсальность полученной системы дифференциальных уравнений (ДУ) [4]. В связи с этим, необходима разработка метода автоматического составления математической модели в задачах управляемости и устойчивости движения ТС.

Принятые допущения. В качестве объекта моделирования рассмотрим автопоезд МАЗ-551605-225 + МАЗ-856102 (рис. 1). Задача рассматривается в плане, модель ТС плоская, распределение вертикальных реакций по колесам эквивалентно статическому. Имитационная модель основана на шарнирно-сочлененном трехзвенном механизме без зазоров в соединениях; мосты жестко связаны с несущими системами звеньев; вертикаль-

ные связи шин голономные, горизонтальные - нелинейные.

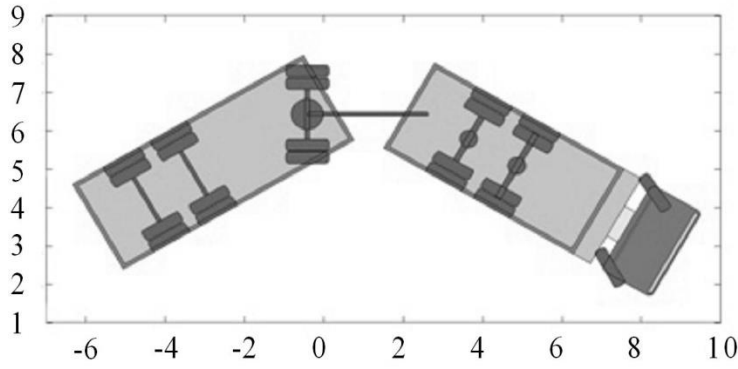


Рис. 1. Имитационная модель автопоезда МАЗ-551605-225 + МАЗ-856102.

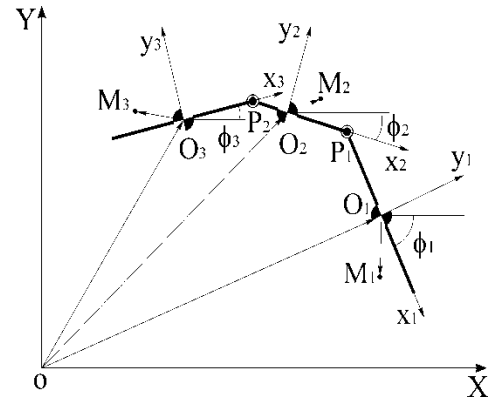


Рис. 2. Динамическая модель трехзвенного автопоезда.

Основной материал. Составление модели. Модель ТС движется в глобальной системе координат OXY (рис. 2). К звеньям привязаны местные системы координат $O_1x_1y_1$, $O_2x_2y_2$, $O_3x_3y_3$, в началах которых сконцентрированы центры масс. Степени свободы системы: OO_1x , OO_1y , ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 . Положение модели в любой момент времени задается радиус-векторами (рис. 2), связанными матричными соотношениями:

$$\begin{bmatrix} \overline{OO_1} \\ \overline{OO_2} \\ \overline{OO_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{R}_2 \\ \vec{R}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{R}_1 + \overline{O_1P_1} + \overline{P_1O_2} \\ \vec{R}_1 + \overline{O_1P_1} + \overline{P_1P_2} + \overline{P_2O_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 \\ \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_4 + \vec{r}_5 \end{bmatrix}, \quad \{\vec{R}\} = \mathbf{G} \cdot \{\vec{r}\}, \quad (1)$$

где $\{\vec{R}\} = [\vec{R}_1 \quad \vec{R}_2 \quad \vec{R}_3]^T$; $\{\vec{r}\} = [\vec{r}_1 \quad \vec{r}_2 \quad \vec{r}_3 \quad \vec{r}_4 \quad \vec{r}_5]^T$; \mathbf{G} - глобальная матрица инцидентий.

Каждый вектор \vec{r}_k жесткого звена можно разложить в местный базис, а $\vec{r}_1 = \vec{R}_1$ - в глобальный:

$$\vec{r}_k = \{\vec{u}_k\} \cdot \{r_k\}^T; \quad \{\vec{u}_k\} = \{\vec{u}\} \cdot C_k^T; \quad \vec{r}_1 = \{\vec{u}\} \cdot \{r_{1xy}\}^T, \quad (2)$$

где $\{\vec{u}\} = [\vec{u}_x \quad \vec{u}_y]$ - базис глобальной системы координат; $\{\vec{u}_k\} = [\vec{u}_{r_k} \quad \vec{u}_{\phi_k}]$ - базис местной полярной системы координат вектора \vec{r}_k ; $\{r_k\} = [r_k \quad 0]$ - модульные компоненты вектора \vec{r}_k в местной полярной системе координат; $C_k = C(\phi_k)$ - матрица направляющих косинусов вектора \vec{r}_k ; $\{r_{1xy}\} = [r_{1x} \quad r_{1y}]$ - модульные компоненты вектора $\vec{r}_1 = \vec{R}_1$.

Массы динамических звеньев модели формируют вектор масс системы:

$$\{M\} = [m_1 \quad m_2 \quad m_3]. \quad (3)$$

Уравнения поступательного движения. Количество движения системы [5]:

$$\bar{Q} = \{M\} \cdot d\{\bar{R}\}/dt. \quad (4)$$

Изменение количества движения системы [5]:

$$d\bar{Q}/dt = \frac{d}{dt}(\{M\} \cdot d\{\bar{R}\}/dt) = \{M\} \cdot d^2\{\bar{R}\}/dt^2 = \{M\} \cdot G \cdot d^2\{\bar{r}\}/dt^2 = \{M\} \cdot G \cdot \{\bar{q}\}. \quad (5)$$

Каждый элемент \bar{q}_k вектора $\{\bar{q}\} = d^2\{\bar{r}\}/dt^2$ можно представить матричным разложением:

$$\bar{q}_k = \{\bar{u}\} \cdot C_k^T \cdot E_{r_k} \cdot (\{p_k\} + \Delta \cdot \{w_k\}), \quad (6)$$

где $E_{r_k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r_k \end{bmatrix}$ - матрица модульного значения вектора \bar{r}_k ; $\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ - матрица

переворота; $\{p_k\} = \begin{bmatrix} \frac{d^2 r_k}{dt^2} & \frac{d^2 \varphi_k}{dt^2} \end{bmatrix}^T$ - вектор линейной и угловой компонент ускорений

вектора \bar{r}_k ; $\{w_k\} = \begin{bmatrix} 2 \cdot \frac{d\varphi_k}{dt} \cdot \frac{dr_k}{dt} & \left(\frac{d\varphi_k}{dt}\right)^2 \end{bmatrix}^T$ - вектор кориолисовой и центробежной компо-

нент ускорений вектора \bar{r}_k .

Сгруппируем данные в векторах и блочных матрицах разреженной структуры:

$$C_A^T = \begin{bmatrix} C_1^T & & \\ & \ddots & \\ & & C_5^T \end{bmatrix}; \quad E_r = \begin{bmatrix} E_{r_1} & & \\ & \ddots & \\ & & E_{r_5} \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} \Delta & & \\ & \ddots & \\ & & \Delta \end{bmatrix};$$

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} \{\bar{u}\} & & \\ & \ddots & \\ & & \{\bar{u}\} \end{bmatrix}; \quad \{p\} = \begin{bmatrix} \{p_1\} \\ \vdots \\ \{p_5\} \end{bmatrix}; \quad \{w\} = \begin{bmatrix} \{w_1\} \\ \vdots \\ \{w_5\} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Выражения (7) позволяют компактно представить вектор $\{\bar{q}\}$:

$$\{\bar{q}\} = \bar{U} \cdot C_A^T \cdot E_r \cdot (\{p\} + D \cdot \{w\}). \quad (8)$$

Изменение количества движения системы в векторно-матричной форме:

$$d\bar{Q}/dt = \{M\} \cdot G \cdot \bar{U} \cdot C_A^T \cdot E_r \cdot (\{p\} + D \cdot \{w\}). \quad (9)$$

Уравнение поступательного движения в векторно-матричной форме:

$$\{M\} \cdot G \cdot \bar{U} \cdot C_A^T \cdot E_r \cdot (\{p\} + D \cdot \{w\}) = \sum_j \bar{F}_j^{(e)}, \quad (10)$$

где $\sum_j \bar{F}_j^{(e)}$ - результирующая всех внешних сил, действующих на ТС, $\bar{U} = E_X \cdot \bar{u}_X + E_Y \cdot \bar{u}_Y$

- матрица разложения в глобальный базис, представленная через разреженные единичные матрицы E_X и E_Y .

В уравнениях (8-10) $\{p\}$ по сути является вектором псевдопараметров, так как некоторые его компоненты дублируют ускорения степеней свободы. Введение логической матрицы T позволяет перейти от $\{p\}$ непосредственно к уникальным ускорениям:

$$\{p\} = T \cdot \{J\}, \quad \{w\} = T \cdot \{H\}, \quad (11)$$

где $\{J\}$ - вектор неизвестных ускорений, $\{H\}$ - вектор компонентов переносных ускорений.

Раскладывая векторное уравнение (10) по базису глобальных координат, получим уравнения проекций на оси OX и OY:

$$\begin{bmatrix} \{M\} \cdot G \cdot E_X \\ \{M\} \cdot G \cdot E_Y \end{bmatrix} \cdot C_A^T \cdot E_r \cdot T \cdot \{J\} = \begin{bmatrix} \sum_j F_{j_x}^{(e)} \\ \sum_j F_{j_y}^{(e)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \{M\} \cdot G \cdot E_X \\ \{M\} \cdot G \cdot E_Y \end{bmatrix} \cdot C_A^T \cdot E_r \cdot D \cdot T \cdot \{H\}. \quad (12)$$

Уравнения вращательного движения. Рассмотрим теперь формирование моментных составляющих.

$$\vec{L}_{n,k} = \vec{L}_n + \vec{l}_{n,k}, \quad \vec{R}_{n,k} = \vec{R}_n + \vec{l}_{n,k}, \quad \vec{a}_{n,k} = d^2 \vec{R}_n / dt^2 + d^2 \vec{l}_{n,k} / dt^2, \quad (13)$$

где \vec{L}_n - векторная координата массы n ; $\vec{l}_{n,k}$ - радиус-вектор к точке k n -го звена в местной системе координат; $\vec{a}_{n,k}$ - ускорение произвольной точки k звена n .

Динамический момент системы есть сумма векторных произведений координат точек и действующих в них сил инерций:

$$\sum_j \vec{L}_j \times m_j \cdot \vec{a}_j = \sum_n \left(\sum_k \vec{L}_{n,k} \times m_{n,k} \cdot \vec{a}_{n,k} \right). \quad (14)$$

После сложных преобразований (14) получим:

$$\sum_j \vec{L}_j \times m_j \cdot \vec{a}_j = \begin{bmatrix} \vec{L}_1 & \vec{L}_2 & \vec{L}_3 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}}_{Diag(\{M\})} \times \begin{bmatrix} \frac{d^2 \vec{R}_1}{dt^2} \\ \frac{d^2 \vec{R}_2}{dt^2} \\ \frac{d^2 \vec{R}_3}{dt^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_1 & I_2 & I_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{d^2 \phi_1}{dt^2} \\ \frac{d^2 \phi_2}{dt^2} \\ \frac{d^2 \phi_3}{dt^2} \end{bmatrix} \cdot \vec{u}_Z, \quad (15)$$

где $Diag(\{M\})$ - диагональная матрица масс звеньев; $\{I\} = [I_1 \ I_2 \ I_3]$ - вектор моментов инерций звеньев относительно центров местных систем координат;

$\{d^2\vec{R}/dt^2\} = [d^2\vec{R}_1/dt^2 \quad d^2\vec{R}_2/dt^2 \quad d^2\vec{R}_3/dt^2]^T$ - вектор ускорений центров масс звеньев;
 $\{\varepsilon\} = [d^2\phi_1/dt^2 \quad d^2\phi_2/dt^2 \quad d^2\phi_3/dt^2]^T$ - вектор угловых ускорений звеньев.

Учитывая соотношения (1, 8, 11), получим векторную запись абсолютных ускорений центров масс звеньев:

$$\{d^2\vec{R}/dt^2\} = G \cdot \vec{U} \cdot C_A^T \cdot E_r \cdot (T \cdot \{J\} + D \cdot T \cdot \{H\}). \quad (16)$$

Вектор угловых ускорений можно выразить через вектор обобщенных ускорений и логическую матрицу перехода K :

$$\{\varepsilon\} = K \cdot \{J\}. \quad (17)$$

Векторные координаты центров масс зависят от положения начальной точки, которая мигрирует по мере отсечения части системы:

$$[\vec{L}_1 \quad \vec{L}_2 \quad \vec{L}_3] = \{r\} \cdot C_A \cdot \vec{U}^T \cdot G_n, \quad (18)$$

где $\{r\} = [\{r_1\} \quad \dots \quad \{r_5\}]$; G_n - матрица инцидентий той части системы, для которой рассматривается динамическое равновесие.

Выражение для записи динамических моментов (15) после подстановки (16-18) получает универсальный вид:

$$\sum_j \vec{L}_j \times m_j \cdot \vec{a}_j = \{r\} \cdot C_A \cdot \vec{U}^T \cdot G_n \cdot \text{Diag}(\{M\}) \times G \cdot \vec{U} \cdot C_A^T \cdot E_r \cdot (T \cdot \{J\} + D \cdot T \cdot \{H\}) + \{I\} \cdot K \cdot \{J\} \cdot \vec{u}_z$$

Подставляя \vec{U} в развернутом виде, получим более компактный вид:

$$\sum_j \vec{L}_j \times m_j \cdot \vec{a}_j = (\{r\} \cdot C_A \cdot N_n \cdot C_A^T \cdot E_r \cdot T + \{I\} \cdot K) \cdot \{J\} \cdot \vec{u}_z + \{r\} \cdot C_A \cdot N_n \cdot C_A^T \cdot E_r \cdot D \cdot T \cdot \{H\} \cdot \vec{u}_z, \quad (19)$$

где $N_n = (E_X^T \cdot G_n \cdot \text{Diag}(\{M\}) \cdot G \cdot E_Y - E_Y^T \cdot G_n \cdot \text{Diag}(\{M\}) \cdot G \cdot E_X)$.

Система дифференциальных уравнений движения имеет вид:

$$\left(\left(\begin{bmatrix} \{M\} \cdot G \cdot E_X \\ \{M\} \cdot G \cdot E_Y \\ \vdots \\ \{r\} \cdot C_A \cdot N_n \end{bmatrix} \cdot C_A^T \cdot E_r \cdot T + \begin{bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \vdots \\ \{I\} \end{bmatrix} \cdot K \right) \cdot \{J\} = \begin{bmatrix} \sum_j F_{j_x}^{(e)} \\ \sum_j F_{j_y}^{(e)} \\ \vdots \\ \sum_k M_{n_k}^{(e)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \{M\} \cdot G \cdot E_X \\ \{M\} \cdot G \cdot E_Y \\ \vdots \\ \{r\} \cdot C_A \cdot N_n \end{bmatrix} \cdot C_A^T \cdot E_r \cdot D \cdot T \cdot \{H\} \right)$$

Моделирование работы рулевого управления. Задача состоит в определении математической связи между углом поворота рулевого колеса и углами поворота управляемых колес. При этом должны обеспечиваться требования теоретического распределения углов

поворота внутреннего и наружного управляемых колес. На основе работ [6] создан программный комплекс оптимизации рулевого привода, позволяющий получить реальные законы поворота управляемых колес в зависимости от угла поворота сошки (рис. 3).

Эти зависимости представляются численно, поэтому для описания функциями необходимо выполнить интерполяцию. Подбор полиномов 5-й степени дает:

$$C_L = [0,25206 \quad 0,29243 \quad -0,014687 \quad 0,1539 \quad 1,0749 \quad 0,00033],$$

$$C_R = [0,16107 \quad -0,1359 \quad 0,01197 \quad -0,19696 \quad 1,0743 \quad -0,00025],$$

$$B(\phi) = [\phi^5 \quad \phi^4 \quad \phi^3 \quad \phi^2 \quad \phi^1 \quad \phi^0]^T,$$

где C_L, C_R - коэффициенты полиномов для левого и правого управляемых колес соответственно; $B(\phi)$ - базис полинома.

Тогда, функции углов поворота колес от угла поворота сошки [7]:

$$\Theta_L = C_L \cdot B(\phi); \quad \Theta_R = C_R \cdot B(\phi). \quad (20)$$

Учитывая передаточное число рулевого механизма i_{SM} , (20) можно переписать как

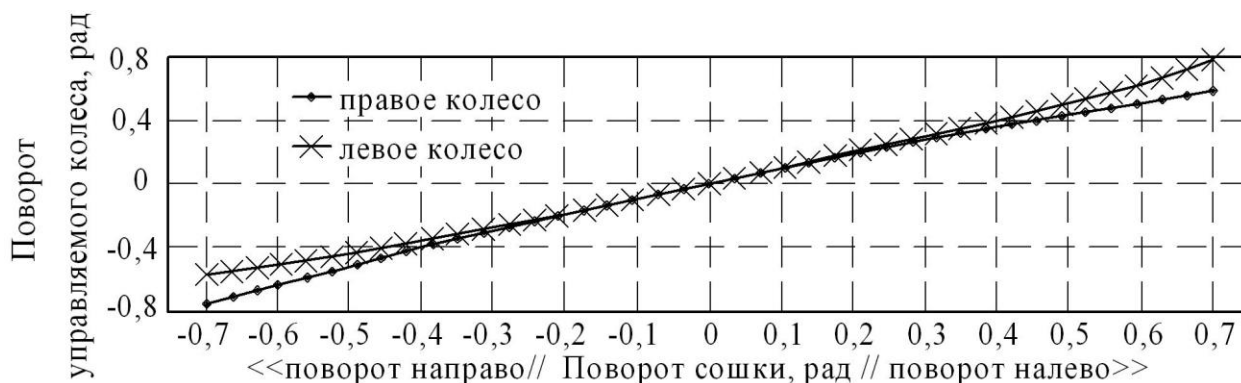


Рис. 3. Распределение углов поворота колес от угла поворота сошки.



Рис. 4. Законы изменения угла поворота рулевого колеса.

$$\Theta_L = C_L^T \cdot B \begin{pmatrix} \theta_{SW} \\ i_{SM} \end{pmatrix}; \quad \Theta_R = C_R^T \cdot B \begin{pmatrix} \theta_{SW} \\ i_{SM} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Закон изменения угла поворота рулевого колеса θ_{SW} может быть произвольным, в частности, гармоническим (рис. 4) [7].

$$\theta_{SW} = A_{SW} \cdot \sin(\omega_{SW} \cdot t), \quad (22)$$

где $A_{SW} = 2,6 \cdot 2 \cdot \pi = 5,2 \cdot \pi$ - амплитуда поворота рулевого колеса (при этом 2,6 – количество оборотов рулевого колеса); ω_{SW} - циклическая скорость (задаётся), t - время.

Выводы. Основной задачей являлась разработка математического аппарата моделирования плоской динамики автомобиля. Главное достоинство метода – высокая степень приспособленности к реализации на ЭВМ. Благодаря использованию матричного подхода выделяются основные преимущества метода: возможность автоматического учета любого количества звеньев, легкость программирования, удобство формирования, хранения и передачи данных, высокое быстродействие калькуляций при численном интегрировании.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. В. Раджа. Tyre and vehicle dynamics. Butterworth Heinemann, SAE, 2006. - 622 p. - ISBN 0 7506 5141 5.
2. R. Rajamani. Vehicle dynamics and control. University of Minnesota, USA, 2006. - 485 p. - ISBN 9780387263960.
3. Вонг Дж. Теория наземных транспортных средств: Пер. с англ. - М.: Машиностроение, 1982. – 284 с.
4. Эллис Д.Р. Управляемость автомобиля. Пер. с англ. - М., «Машиностроение». 1975, 216 с.
5. Т. Леви-Чевита, У. Амальди. Курс теоретической механики. Пер. с итал. Д. И. Кутилина. - М.: Издательство иностранной литературы, 1951. 200 с.
6. Оптимизация конструктивных параметров неразрезной рулевой трапеции автомобиля / М.В. Дячук, А.С. Лиходей // Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури. - Дніпропетровськ: ПДАБтаА, 2007. - №12. С. 12-16.
7. Моделювання керуваності автопотяга / Дячук М.В., Петренко Д.І. // Зб. наук. пр.: Інтенсифікація робочих процесів будівельних та дорожніх машин; Вип. 51 - Дн-ськ: ПДАБА, 2009, С. 199-209.
8. www.ftyre.com.