

УДК 624.042

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЗДАНИЙ, СООРУЖЕНИЙ И СРЕД В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ПАКЕТЕ MathCAD

ЯРОШЕНКО Д. С.<sup>1\*</sup>, к.т.н.  
ГУСЛИСТАЯ А. Э.<sup>2\*</sup> к.т.н, доц.,

<sup>1\*</sup> кафедра металлических, деревянных и пластмассовых конструкций, Государственное высшее учебное заведение «Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры», ул. Чернышевского, 24-а, 49600, Днепропетровск, Украина, тел. 47-16-56, e-mail: YaroshenkoDenis@i.ua, ORCID ID: 0000-0002-2494-6082

<sup>2\*</sup> кафедра железобетонных и каменных конструкций, Государственное высшее учебное заведение «Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры», ул. Чернышевского, 24-а, 49600, Днепропетровск, Украина, тел. +38 (0562) 47-44-17, e-mail: GuslystaAnna@3g.ua, ORCID ID: 0000-0002-4486-0630

**Аннотация.** Подавляющее большинство задач динамики сооружений нуждаются в нелинейном анализе во временной области. Но современные программные комплексы на базе метода конечных элементов (МКЭ) далеко не всегда могут решать такие сложные задачи с учетом всех видов нелинейностей. Поэтому возникает необходимость в разработке альтернативных подходов в решении подобных задач. В статье рассматриваются дискретные механические модели сред и конструкций, дифференциальные уравнения движения которых получаются на основе общих законов механики. **Цель.** Формирование систем дифференциальных уравнений движения (СДУД) «вручную» - трудоемкий процесс, сопряженный с высокой вероятностью возникновения ошибок. Целью данного исследования есть выявление путей автоматизированного получения и численного решения СДУД динамических моделей конструкций цепной структуры. **Методика.** Для описания движения моделей конструкций и сред используются дифференциальные уравнения движения в формах, известных из курсов теоретической механики и строительной механики. Для символьных и численных вычислений используется математический пакет MathCAD. **Результаты.** Получены алгоритмы синтеза и численного решения СДУД динамических моделей цепочной структуры. **Научная новизна.** Приведены результаты работы по развитию методов моделирования нелинейной динамики строительных объектов, сред. Показаны пути автоматизированного получения СДУД для моделей цепочной структуры. На примере динамической модели балки в форме «метода прямых» и метода перемещений, выявлено, что уравнения движения такой конструкции могут быть получены как обратным способом, так и прямым (что существенно расширяет возможности автоматизации получения СДУД конструкций такого типа). **Практическая значимость.** Предложенные алгоритмы могут быть использованы при разработке программного обеспечения для моделирования динамики зданий и сооружений.

**Ключевые слова:** динамика сооружений; дифференциальные уравнения движения; временная область; расчетная модель; алгоритм; MathCAD

## НЕЛІНІЙНІ ДИНАМІЧНІ МОДЕЛІ БУДІВЕЛЬ, СПОРУД І СЕРЕДОВИЩ В МАТЕМАТИЧНОМУ ПАКЕТІ MathCAD

ЯРОШЕНКО Д. С.<sup>1\*</sup>, к.т.н.  
ГУСЛИСТА Г. Е.<sup>2\*</sup> к.т.н, доц.,

<sup>1\*</sup> кафедра металевих, дерев'яних та пластмасових конструкцій, Державний вищий навчальний заклад «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», вул. Чернишевського, 24-а, 49600, Дніпропетровськ, Україна, тел. +38 (0562) 47-16-56, e-mail: YaroshenkoDenis@i.ua, ORCID ID: 0000-0002-2494-6082

<sup>2\*</sup> кафедра залізобетонних та кам'яних конструкцій, Державний вищий навчальний заклад «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», вул. Чернишевського, 24-а, 49600, Дніпропетровськ, Україна, тел. +38 (0562) 47-44-17, e-mail: GuslystaAnna@3g.ua, ORCID ID: 0000-0002-4486-0630

**Анотація.** Переважна більшість задач динаміки споруд потребує нелінійного аналізу в часовій області. Але сучасні програмні комплекси на базі методу скінчених елементів (МСЕ) далеко не завжди можуть вирішувати такі складні задачі з урахуванням всіх видів нелінійностей. Тому виникає необхідність у розробці альтернативних підходів у розв'язанні подібних задач. У статті розглядаються дискретні механічні моделі середовищ і конструкцій, диференціальні рівняння руху яких отримуються на основі загальних законів механіки. **Мета.** Формування систем диференціальних рівнянь руху (СДРР) «вручну» - трудомісткий процес, пов'язаний з високою імовірністю виникнення помилок. Метою даного дослідження є виявлення шляхів автоматизованого отримання і чисельного вирішення СДРР динамічних моделей конструкцій ланцюгової структури. **Методика.** Для описання руху моделей конструкцій і середовищ використовуються диференціальні рівняння руху у формах, відомих із курсів теоретичної механіки і будівельної механіки. Для символьних і чисельних обчислень використовується математичний пакет MathCAD. **Результати.** Отримано алгоритми синтезу і чисельного вирішення СДРР динамічних моделей конструкцій ланцюгової структури. **Наукова новизна.** Наведені результати роботи з розвитку методів

моделювання нелінійної динаміки будівельних об'єктів, середовищ. Показані шляхи автоматизованого отримання СДРР для моделей ланцюгової структури. На прикладі динамічної моделі балки у формі «методу прямих» і методу переміщень, виявлено, що рівняння руху такої конструкції можуть бути отримані як оберненим способом, так і прямим (що суттєво розширює можливості автоматизації отримання СДРР конструкцій такого типу). *Практична значимість.* Запропоновані алгоритми можуть бути використані при розробці програмного забезпечення для моделювання динаміки будівель і споруд.

**Ключові слова:** динаміка споруд; диференціальні рівняння руху; часова область; розрахункова модель; алгоритм; MathCAD

## NONLINEAR DYNAMIC MODELS OF CONSTRUCTIONS, INSTALLATIONS AND ENVIRONMENTS IN MATHEMATICAL PACKAGE MathCAD

YAROSHENKO D. S.<sup>1\*</sup>, *Cand. Sc. (Tech.)*,  
GUSLYSTA A. E.<sup>2\*</sup>, *Cand. Sc. (Tech.), Associate Prof.*

<sup>1\*</sup> Department of Metallic, Wooden and Plastic Structures, State Higher Education Establishment "Prydneprov'ska State Academy of Civil Engineering and Architecture", 24-A, Chernishevskogo str., Dnipro 49600, Ukraine, tel. +38 (0562) 47-16-56, e-mail: YaroshenkoDenis@i.ua, ORCID ID: 0000-0002-2494-6082

<sup>2\*</sup> Department of Reinforced concrete and Masonry Constructions, State Higher Education Establishment "Prydneprov'ska State Academy of Civil Engineering and Architecture", 24-A, Chernishevskogo str., Dnipro 49600, Ukraine, tel. +38 (0562) 47-44-17, e-mail: GuslystaAnna@3g.ua, ORCID ID: 0000-0002-4486-0630

**Annotation.** The overwhelming majority of the tasks of the dynamics of structures require a nonlinear analysis in the time domain. But modern software based on the finite element method (FEM) can not always solve such complex problems, taking into account all types of nonlinearities. Therefore, there is a need to develop alternative approaches to solving similar problems. In the article discrete mechanical models of environments and constructions whose differential equations of motion are obtained on the basis of general laws of mechanics are considered. **Purpose.** Formation of systems of differential equations of motion (SDEM) "manually" - a labor-intensive process, associated with a high probability of errors. The purpose of this study is to identify ways of automated obtaining and numerical solution of SDEM dynamic models of structures of the chain structure. **Methodology.** To describe the motion of models of constructions and environments, differential equations of motion are used in forms known from the courses of theoretical mechanics and structural mechanics. For symbolic and numerical calculations, the MathCAD mathematical package is used. **Findings.** The results of work on the development of methods for modeling nonlinear dynamics of building objects, environments are presented. The ways of automated acquisition of SDEM for models of the chain structure are shown. On the example of a dynamic beam model in the form of a "straight-line method" and a displacement method, it was found that the equations of motion of such a structure can be obtained both in reverse and in direct way (which essentially extends the possibilities of automation for the acquisition of SDEM of such structures). **Practical value.** The proposed algorithms can be used in the development of software for modeling the dynamics of buildings and structures.

**Keywords:** structural dynamic; differential equations of motion; time domain; design model; algorithm; MathCAD

### Вступ

У сучасній практиці при аналізі роботи будівельних конструкцій інженери-будівельники, в переважній більшості, застосовують метод скінченних елементів (МСЕ), який реалізовано в багатьох спеціалізованих програмних комплексах (вітчизняні: ЛИРА, SCAD, Selena, закордонні: ANSYS, NASTRAN, Robot, SAP та ін.). Для розв'язання деяких інженерних задач можливостей цих комплексів цілком достатньо.

Але існує цілий пласт задач будівництва, розв'язання яких може потребувати інших, альтернативних підходів. Це, наприклад, **задачі нелінійної динаміки споруд:**

- врахування нелінійних (пружних і дисипативних) характеристик самих конструкцій, зв'язків і всіх підсистем споруди, а також описання нелінійних динамічних процесів, що виникають при

статико-динамічній взаємодії споруд зі складною неоднорідною основою;

- врахування аеродинамічної нелінійної взаємодії споруд і їх елементів і конструкцій з вітровими потоками (вихрове збудження, бафтинг, галоупування і ін.), з потоками і хвилями рідин і газів;

- розробка способів і засобів гасіння коливань.

Очевидною є необхідність дослідження нелінійної поведінки споруд з врахуванням притаманних їм нелінійностей у **часовій області** (зараз розрізняється чотири групи нелінійностей: геометрична, фізична, конструкційна, генетична). І часто комплекси на основі МСЕ не можуть вирішувати дані задачі. Так, навіть лінійні задачі динаміки з різним внутрішнім тертям в підсистемах будівельної споруди не можуть сьогодні коректно розв'язуватись вітчизняними спеціалізованими програмними комплексами, тому виникає необхідність у розробці **альтернативних методів** розв'язання подібних задач.

Найбільш важливим етапом у розв'язанні таких задач є *створення адекватної розрахункової динамічної моделі*, що побудована на основі всієї відомої інформації про об'єкт і якомога точніше відображатиме поведінку конструкції при її динамічній взаємодії з навантаженнями. Одним зі шляхів моделювання споруди є представлення континуального об'єкта у вигляді механічної моделі з набором дискретних інерційних, пружних і дисипативних характеристик. Коливання отриманої моделі описуються СДРР і вирішуються чисельно. Такий підхід дозволяє отримувати результат (вібропереміщення, віброшвидкості, віброприскорення елементів споруди, їх напружень) у часовій області.

#### Мета досліджень

Найбільш універсальним способом отримання диференціальних рівнянь руху механічних систем є рівняння Лагранжа II роду, які дозволяють моделювати досить складні механічні системи (наприклад, в [3] наведено приклад отримання рівнянь руху пристрою демпфірування коливань мостового крана-перевантажувача). Але їх «ручний» вивід часто є дуже громіздким і для динамічних моделей складних споруд з великою кількістю динамічних ступенів вільності - навіть неможливим. Тому важливу і актуальну проблемою є **автоматизація** процесу отримання СДРР.

Підкреслимо, що методи чисельного вирішення СДРР вже досить добре розроблені. Така робота ведеться за кордоном. Наприклад, програми «Универсальный механизм», "MathLab/Simulink", "Adams/modeFrontier", направлені на моделювання динаміки систем твердих тіл (машин і механізмів) [5]. У той же час в роботі [3] вказується на деякі недоліки таких програм, особливо при необхідності вирішення задач з багатьма ступенями вільності і пропонується алгоритм автоматичного отримання СДРР для маятника в математичному пакеті Maple.

Метою даної статті є показати шляхи автоматизованого отримання і чисельного вирішення систем диференціальних рівнянь руху динамічних моделей конструкцій ланцюгової структури. Для символічних і чисельних обчислень використовується математичний пакет MathCAD.

#### Методика та результати досліджень

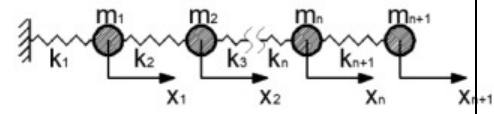
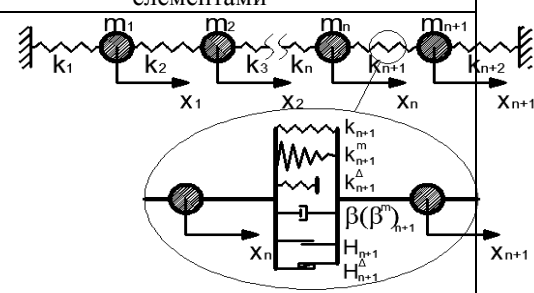
На сучасному етапі розвитку комп'ютерної техніки (і, як наслідок, рівня складності будівельних об'єктів) ідеалізований розгляд моделі споруди без її взаємодії із тими середовищами, з якими ця споруда взаємодіє, у багатьох випадках є недостатнім. Основними середовищами, з якими «співпрацюють» будівельні об'єкти є такі: ґрунтове середовище, рідини, повітря.

В табл.1 приведена найпростіша модель, якою можна моделювати те чи інше середовище чи поздовжні коливання продовговуватих конструкцій – одномірний ланцюг пов'язаних осциляторів. За

визначенням Я.Г. Пановко такі моделі відносяться до систем ланцюгової структури, в яких пружні та інші сили нескладно виражаються через переміщення двох сусідніх тіл (1). Для таких систем найбільш просто отримати СДРР прямим способом (за визначенням Я.Г. Пановко).

Таблиця 1

#### Можливі ланцюгові моделі середовищ і продовговуватих конструкцій / Possible chain models of environments and extended structures

Модель 1	Проста модель середовища з лінійно-пружними зв'язками між дискретними масами (без врахування тертя)
	 $m_n \ddot{x}_n = [k_{n+1}(x_{n+1} - x_n) - k_n(x_n - x_{n-1})] + P(t) \quad (1)$
Модель 2	Ускладнена ланцюгова модель з нелінійними пружними і дисипативними елементами
	 <p>Для випадку лінійної відновлювальної сили, в'язкого тертя і нелінійного сухого (кулонового) тертя система диференціальних рівнянь руху матиме наступний вигляд:</p> $m_n \ddot{x}_n = \left[ \begin{aligned} & [k_{n+1}(x_{n+1} - x_n) - k_n(x_n - x_{n-1})] + \\ & + \left[ \beta_{n+1} \left( \dot{x}_{n+1} - \dot{x}_n \right) - \beta_n \left( \dot{x}_n - \dot{x}_{n-1} \right) \right] + \\ & + \left[ H_{n+1} \cdot \text{sign} \left( \dot{x}_{n+1} - \dot{x}_n \right) - H_n \cdot \text{sign} \left( \dot{x}_n - \dot{x}_{n-1} \right) \right] \end{aligned} \right] + P(t) \quad (2)$

Реалізація моделі 1 в Mathcad (прийняті довільні параметри для системи з п'ятьма ступенями вільності при вільних незатухаючих коливаннях) представлена на рис.1. СДРР отримується автоматично для заданої кількості динамічних ступенів вільності. Однотипність рівнянь типу (1) і (2) дозволяє отримувати їх шляхом побудови підпрограми-циклу, результатом роботи якої є матриця правих частин СДРР (рис. 1). Чисельне вирішення отриманої СДРР відбувається, наприклад, за допомогою вбудованої функції rkfixed, що реалізує метод Рунге-Кутти 4-го порядку.

Матриця мас, кг

$$M := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Матриця жорсткостей, Н/м

$$k := \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$n := 5$  Кількість динамічних ступенів вільності

## Початкові умови

$X_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$  Початкові переміщення мас системи, м

$v_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  Початкові швидкості мас системи, м/с

$NU := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad NU_{2,i} \leftarrow X_{0,i} \\ \quad NU_{2,i+1} \leftarrow v_{0,i} \end{cases}$  Підпрограма, що формує спільну матрицю початкових умов для переміщень і швидкостей мас системи

Підпрограма, що формує матрицю правих частин системи диференціальних рівнянь руху

$D(X) := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad D_{2,i} \leftarrow X_{2,i+1} \\ \quad D_{2,i+1} \leftarrow \frac{-1}{M_i} \left[ k_i \cdot \begin{cases} X_{2,i} - X_{2,i-2} & \text{if } 2-i-2 \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \right] \end{cases}$

---

$- \left( \begin{cases} k_{i+1} & \text{if } i+1 \leq n-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \right) \cdot (X_{2,i+2} - X_{2,i})$

Підпрограма інтегрування системи ЗДР

$DX := \text{rkfixed}(NU, t_0, t_{end}, N, D)$

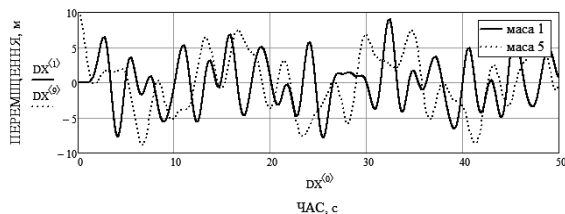


Рис. 1. Приклад моделювання динаміки ланцюгової моделі середовища в MathCAD/ An example of modeling the dynamics of a chain environment model in MathCAD

Як видно із табл. 1 і рис. 1, даний підхід дозволяє в досить економний спосіб (з точки зору витрат часу інженера на виведення і запис СДРР і машинного – для чисельного їх розв'язання) створювати і аналізувати дані динамічні моделі з врахування фактично всіх видів нелінійностей, які необхідно врахувати в розрахунках.

В даній реалізації цього алгоритму підпрограма, що формує матрицю правих частин СДРР, виконує символічні обчислення. Проте кількість рівнянь руху, які MathCAD може сформувати у символічному вигляді, обмежена (практичні розрахунки показали «стелю» MathCAD в 11-12 динамічних ступенів вільності). Це дещо обмежує можливості використання даного підходу.

Альтернативним шляхом є написання програми, що і формує СДРР і вирішує її чисельно. В такій постановці обмеження на символічні операції не мають значення. Приклад реалізації такого підходу – на рис.2 (знову таки, при довільних параметрах системи, реалізується чисельний метод Рунге-Кутти 4-го порядку).

```

"Кількість динамічних ступенів вільності системи"
n ← 100
"початкові умови"
X0,0 ← 1
for j ∈ 1..2n-1
  X0,j ← 0
"матриця мас"
for j ∈ 0..n-1
  Mj ← 1
"матриця жорсткостей"
for j ∈ 0..n-1
  kj ← 5
"час початку процесу"
t0 ← 0
"час завершення процесу"
tk ← 10
"крок інтегрування"
h ← 0.0001
for j ∈ 0..n-1
  for i ∈ 0, 1, ...,  $\frac{tk - t_0}{h} - 1$ 
    K1,j ← h · Xi,2-j+1
    L1,j ← h ·  $\frac{-1}{M_j} \left[ k_j \cdot \begin{cases} X_{i,2-j} - X_{i,2-j-2} & \text{if } j-1 \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \right] -$ 
     $\left( \begin{cases} k_{j+1} & \text{if } j+1 \leq n-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \right) \cdot (X_{i,2-j+2} - X_{i,2-j})$ 
    ...
    Xi+1,2,j ← Xi,2,j +  $\frac{K_{1,j} + 2K_{2,j} + 2K_{3,j} + K_{4,j}}{6}$ 
    Xi+1,2,j+1 ← Xi,2,j+1 +  $\frac{L_{1,j} + 2L_{2,j} + 2L_{3,j} + L_{4,j}}{6}$ 
    ti+1 ← ti + h
  
```

Рис. 2. Фрагмент програми для формування і чисельного вирішення СДРР ланцюгової моделі середовища в MathCAD/ A fragment of the program for the formation and numerical solution of the SDEM of the chain environment model in MathCAD

Більш складна модель, наприклад, ґрунтової основи (хоча може бути застосована і для інших

видів середовищ), пропонується проф. В.В. Кулябко [2]. Дана модель дозволяє моделювати як лінійні так і нелінійні пружні і дисипативні зв'язки між дискретними масами моделі. Деякі варіанти уточнення і практичного застосування даної моделі були запропоновані проф. В.А. Банахом [1]. Правда при цьому застосовувався ПК «ЛИРА», можливості якого (поки що) не дозволяють обраховувати динамічну поведінку нелінійних розрахункових моделей у часовій області (але варто відмітити, що навіть «лінійна» динаміка в часі – суттєвий крок уперед останніх версій цього ПК).

### Динамічні моделі балкової (стрижневої) конструкції і способи складання диференціальних рівнянь руху

Нижче наводиться приклад створення динамічної моделі балкової (стрижневої) конструкції так званим «методом прямих», який застосовується школою проф. В.В. Кулябка для моделювання таких будівельних і машинобудівельних об'єктів, у яких необхідно враховувати їхні нелінійні властивості і потрібен розрахунок конструкції чи споруди в часовій області.

Розглядалися дискретні моделі згинаних балкових систем з точковими масами і нестисними стержнями (табл.2). Такі припущення в переважній більшості випадків є цілком виправданими з точки зору співвідношення точності моделі до її складності, але при необхідності, без суттєвих доопрацювань дані моделі можна ускладнити з тим, щоб можна було враховувати поздовжні деформації елементів і «неточковість» дискретних мас (до речі, додаткові рівняння руху, що враховують моменти інерції мас, матимуть ту ж структуру, що і рівняння (1)).

В [4] вказується, що для балкових систем зручніше застосовувати **обернений спосіб** складання СДРР. Але рівняння руху в такій формі не зручні для вирішення в чисельному вигляді стандартними методами (наприклад, методом Рунге-Кутти), адже потребують додаткових перетворень для згрупування всіх похідних другого порядку так, щоб у кожному рівнянні була одна така похідна. В табл. 2 наведені моделі балки, рівняння яких складаються в прямій формі і позбавлені недоліків оберненої форми запису СДРР.

Аналіз моделі балки у формі методу переміщень показав, що навіть при припущенні, що маси точкові і не мають моменту інерції маси, в моделі необхідно враховувати динамічні ступені вільності, що описують повороти цих точок. В такому разі відповідні коефіцієнти матриці, що описує інерційні характеристики системи, приймаються рівними нулю. Врахування ж лише поступальних ступенів вільності призводитиме до великих погрешностей (тестувалися частоти і форми власних коливань).

Моделювання стрижневих систем у формі «методу прямих» має ряд переваг:

- для виведення СДРР немає необхідності у попередньому визначенні коефіцієнтів жорсткості

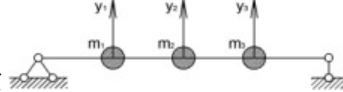
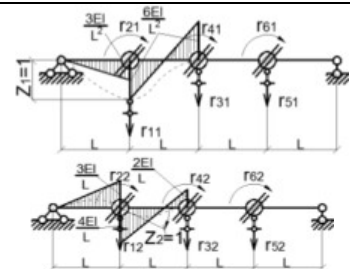
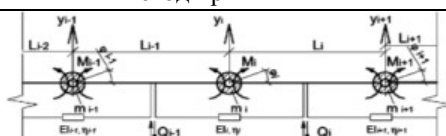
(для прямої форми запису) або піддатливості (для оберненої форми запису);

- можна легко змоделювати різне лінійне тертя в підсистемах конструкції чи споруди, задаючи різні коефіцієнти  $\eta$  в рівняннях (4), або нелінійне, (наприклад, сухе тертя в опорах мосту);

- процес отримання СДРР (4) можна автоматизувати (див. рис.3).

Таблиця 2

### Порівняння динамічних моделей згинальних стержнів / Comparison of dynamic models of bending rods

 <p>схема дискретизації</p>	
<p>Метод переміщень</p>	
Розрахункова схема	 <p>до визначення невідомих коефіцієнтів від одиничних переміщень <math>Z_1=1, Z_2=1</math></p>
Диференціальні	$M_i \cdot \ddot{y}_i + r_{i,1} \cdot (\alpha \cdot \dot{y}_i + y_i) + r_{i,2} \cdot (\alpha \cdot \dot{y}_2 + y_2) + r_{i,j} \cdot (\alpha \cdot \dot{y}_j + y_j) = (0; P(t)), \text{де } i=1,2,\dots,j \quad (3)$ <p>ДРР у прямій формі для і-тої маси моделі в методі переміщень, <math>\alpha</math> – коефіцієнт, що враховує лінійне (в'язке) внутрішнє тертя</p>
<p>«Метод прямих»</p>	
Розрахункова схема	 <p>фрагмент динамічної моделі балки за «методом прямих»</p>
Диференціальні рівняння руху	$\ddot{y}_i = \frac{1}{m_i} (Q_i - Q_{i-1}),$ $Q_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{L_i},$ $Q_{i-1} = \frac{M_i - M_{i-1}}{L_{i-1}}, \quad (4)$ $M_i = \frac{-2E_i I_i}{L_{i-1} + L_i} \left[ (\varphi_i - \varphi_{i-1}) + \eta_i (\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_{i-1}) \right],$ $M_{i-1} = \frac{-2E_{i-1} I_{i-1}}{L_{i-2} + L_{i-1}} \left[ (\varphi_{i-1} - \varphi_{i-2}) + \eta_{i-1} (\dot{\varphi}_{i-1} - \dot{\varphi}_{i-2}) \right],$ $M_{i+1} = \frac{-2E_{i+1} I_{i+1}}{L_i + L_{i+1}} \left[ (\varphi_{i+1} - \varphi_i) + \eta_{i+1} (\dot{\varphi}_{i+1} - \dot{\varphi}_i) \right],$ $\varphi_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{L_i}, \dot{\varphi}_i = \frac{\dot{y}_{i+1} - \dot{y}_i}{L_i}.$ <p>ДРР для і-тої маси моделі у формі «методу прямих»</p>

Так само, як і у випадку СДРР (1), СДРР (4) може бути отримана автоматично для заданої кількості динамічних ступенів вільності з допомогою

декількох підпрограм-циклів, що окремо формують матриці згинальних моментів  $M$ , поперечних сил  $Q$  і матрицю прямих частин СДРР:

**Підпрограма для автоматичного формування матриці згинальних моментів**

$M := \text{for } i \in 1..n$

$$M_i \leftarrow \frac{-2E \cdot I_{i-1}}{L_{i-1} + L_i} \left[ \begin{array}{c|c} Y_{2,i} \text{ if } i \leq n-1 & -Y_{2,(i-1)} & Y_{2,(i-1)} & 0 \text{ if } i=1 \\ \hline 0 \text{ otherwise} & L_i & L_{i-1} & Y_{2,(i-2)} \text{ otherwise} \end{array} \right] + \eta_{i-1} \left[ \begin{array}{c|c} Y_{2,i+1} \text{ if } i \leq n-1 & -Y_{2,i-1} & Y_{2,i-1} & 0 \text{ if } i=1 \\ \hline 0 \text{ otherwise} & L_i & L_{i-1} & Y_{2,i-3} \text{ otherwise} \end{array} \right]$$

**Підпрограма для автоматичного формування матриці поперечних сил**

$Q := \text{for } i \in 0..n$

$$Q_i \leftarrow \begin{array}{c|c} M_{i+1} \text{ if } i+1 < n+1 & -M_i \text{ if } i > 0 \\ \hline 0 \text{ otherwise} & 0 \text{ otherwise} \end{array} L_i$$

**Підпрограма для автоматичного формування матриці прямих частин СДРР**

$$D(t, Y) := \begin{array}{c} \text{for } i \in 0..n-1 \\ \left[ \begin{array}{c} D_{2,i} \leftarrow Y_{2,i+1} \\ D_{2,i+1} \leftarrow \frac{1}{m_i} (Q_{i+1} - Q_i) - g \end{array} \right] \\ D \end{array}$$

Рис. 3. Отримання СДРР балкової конструкції у формі «методу прямих» / Obtaining SDEM beam structure in the form of "straight-line method"

**Наукова новизна та практична значимість**

У статті наведені результати роботи в напрямку розвитку методів моделювання будівельних об'єктів, захисних пристроїв, середовищ, а також рекомендації з побудови їхніх нелінійних динамічних моделей різними методами з урахуванням їх ефективності в тих чи інших задачах. Показані шляхи автоматизованого отримання СДРР для моделей ланцюгової структури.

Вище зазначалося, що вітчизняні програмні комплекси, призначені для розрахунку будівельних конструкцій, в останнє десятиліття зробили великий крок уперед у вирішенні завдань динаміки. Однак, це стосується, в основному, лінійних задач. Навіть у лінійній постановці ще проблематичним є облік різного внутрішнього тертя в підсистемах споруди (наприклад, на порядок можуть відрізнятись логарифмічні декременти коливань для ґрунтової основи + залізобетонних опор і фундаментів + металевих легких конструкцій).

**Перспективні напрямки подальших досліджень**

Підхід, описаний для моделювання балкових конструкцій у формі «методу прямих», застосовний і для моделювання рамних конструкцій, у тому числі і в просторовій постановці. Основним недоліком тут є великий об'єм ручної роботи при складанні СДРР. У подальших дослідженнях планується розвиток методик автоматичного синтезу СДРР і на такі моделі будівель і споруд.

**СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ**

1. Банах В. А. Статико-динамические расчетные модели зданий и сооружений в сложных инженерно-геологических условиях: монография / В.А. Банах; ЗГИА. – Запорожье, 2012. – 322 с.
2. Кулябко В. В. Динамика конструкций, зданий и сооружений. Часть 1. Статико-динамические модели для анализа свободных колебаний и взаимодействия сооружений с основаниями и подвижными нагрузками. – Запорожье, 2005. – 232 с.
3. Куценко Л. М. Опис руху n-ланкового маятника за допомогою операторів системи Maple / Л. М. Куценко, Р. М. Колочавін // Прикладна геометрія та інженерна графіка. - 2012. - Вип. 90. - С. 166-172.
4. Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний: Учебное пособие. – 2-е изд., перераб. – М.: Наука. ГлавРедФизМатЛит, 1980. – 272 с.
5. Сотников А. Л. Компьютерно-ориентированный автоматический синтез уравнений движения механических систем / Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні. Вип. 42. – Донецьк: ДНТУ, 2008. – С. 101-122. Режим доступу: [http://vlp.com.ua/files/13\\_59.pdf](http://vlp.com.ua/files/13_59.pdf).
6. Kulyabko V. Taking account of nonlinear properties of subsystems in problems of dynamic interaction of structures with loads, bases and flows / V. Kulyabko, V.Chaban, A.Makarov, D.Yaroshenko // Nonlinear Dynamics – 2016: Proceedings of the 5th International Conference / National Technical University "Kharkov Polytechnic Institute" at al. – Kharkov, 2016. – P.125-132.

**REFERENCES**

1. Banakh V.A. *Statiko-dinamicheskie raschetnye modeli zdaniy i sooruzheniy v slozhnykh inzhenerno-geologicheskikh usloviyakh* [Static-dynamic research models of buildings and structures in difficult engineering-geological conditions]. Zaporozhye: ZSEA Publ., 2012, 322 p. (in Russian)
2. Kulyabko V.V. *Dinamika konstruksiy, zdaniy i sooruzheniy. Chast 1. Statiko-dinamicheskiye modeli dlia analiza svobodnykh kolebaniy i vzaimodeystviya sooruzheniy s osnovaniyami i podvizhnymi nagruzkami* [Dynamics of structures, buildings and erections. Part 1. Static-dynamical models for analysis of free vibrations and interaction between erections and foundations and travelling loads]. Zaporozhye: ZSEA Publ., 2005, 232 p. (in Russian)
3. Kutsenko L. N. and Kolochavin R. M. *Opis rukhu n-lankovoho maiatnyka za dopomohoiu operatoriv systemy Maple* [Description of movement of a n-link pendulum by means of operators of maple system]. / Applied geometry and engineering graphic, 2012, Issue 90, pp. 166-172. (inUkrainian)
4. Panovko Y.G. *Vvedenie v teoriyu mekhanicheskikh kolebaniy* [Introduction in theory of mechanical oscillations]. Moscow: Nauka, 1980, 272 p. (in Russian)

5. Sotnikow A.L. *Kompiuterno-oriyentirovanny avtomaticheskij sintez uravneniy dvizheniia mekhanicheskikh sistem* [Computer-oriented automatic synthesis of equations of motion of mechanical systems]. / Automation of production processes in mechanical engineering and instrument making, Donetsk: DNTU, 2008. - Issue 42, pp. 101-122. Available at: [http://vlp.com.ua/files/13\\_59.pdf](http://vlp.com.ua/files/13_59.pdf). (in Russian)
6. Kulyabko V., Chaban V., Makarov A. and Yaroshenko D. Taking account of nonlinear properties of subsystems in problems of dynamic interaction of structures with loads, bases and flows / V. Kulyabko, // Nonlinear Dynamics – 2016: Proceedings of the 5th International Conference / National Technical University “Kharkov Polytechnic Institute” et al. – Kharkov, 2016, pp.125-132.