УДК 514.18

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АБСОЛЮТНОЙ ПОГРЕШНОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ КРИВОЙ С ЗАДАННЫМИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

ГАВРИЛЕНКО Е. А. [1], *к.т.н, доц.*,
ХОЛОДНЯК Ю. В. [2*], *к.т.н.*,
НАЙДЫШ А. В. [3*], *д.т.н., проф.*

[1] Кафедра информационных технологий проектирования им. В. М. Найдыша, Таврический государственный агротехнологический университет, пр. Б. Хмельницкого, 18, 72310, Мелитополь, Запорожская обл., Украина, ORCID ID: 0000-0003-4501-445X
[2*] Кафедра информационных технологий проектирования им. В. М. Найдыша, Таврический государственный агротехнологический университет, пр. Б. Хмельницкого, 18, 72310, Мелитополь, Запорожская обл., Украина, тел. +38 (0619) 42-68-62, e-mail: yuliya.kholodnyak@tsatu.edu.ua, ORCID ID: 0000-0001-8966-9269
[3*] Кафедра прикладной математики и информационных технологий, Мелитопольский государственный педагогический университет имени Богдана Хмельницкого, ул. Гетманская, 20, 72312, Мелитополь, Запорожская обл., Украина, ORCID ID: 0000-0003-4057-7085

Аннотация. ***Цель.*** Целью исследования является разработка способа определения абсолютной погрешности интерполяции точечного ряда неосциллирующей плоской кривой линией исходя из условия монотонного изменения дифференциально-геометрических характеристик вдоль исходного геометрического образа. ***Методика.*** Проведенный анализ способов оценки точности интерполяции методами непрерывного геометрического моделирования показал, что недостатки данных способов вызваны решением сравнивать полученную модель с известной наперед заданной функцией, отличной от исходной кривой, которой принадлежит точечный ряд. В работе предлагается способ определения точности интерполяции, основанный на формировании кривой исходя из ее геометрических свойств. Предположение, на основе которого формируется кривая, следующее: если существует кривая линия, интерполирующая исходный точечный ряд, и у этой линии отсутствуют особые точки (точки перегиба, смены направления возрастания вдоль кривой значений кривизны, кручения и т.д.), то такие особые точки отсутствуют и у исходного объекта. Рассматривается две составляющие возникновения погрешности. Погрешность, с которой сформированная кривая линия, интерполирующая исходный точечный ряд, представляет исходную кривую, оценивается как область возможного расположения всех кривых линий, свойства которых идентичны свойствам исходной кривой. Интерполирующая кривая линия формируется в виде сгущенного точечного ряда, состоящего из сколь угодно большого количества узлов, определенных исходя из условия возможности интерполировать его кривой линией с заданными характеристиками. Погрешность формирования интерполирующей кривой линии оценивается как область возможного расположения кривой линии, интерполирующей сгущенный точечный ряд. ***Результаты.*** В данной работе представлено решение задачи для плоской кривой исходя из условия отсутствия осцилляции и условия монотонного изменения кривизны. Область расположения кривой, определенная исходя из условия выпуклости кривой, максимальна и является исходной. Наложение последующих условий: монотонное изменение кривизны вдоль кривой и назначение фиксированных положений касательных и значений кривизны в исходных точках, локализует область возможного решения. ***Научная новизна.*** Разработанный способ оценки точности интерполяции кривой позволяет определить абсолютную погрешность, с которой модель представляет исходную кривую и точность, с которой интерполирующая кривая представляет любую кривую с заданными свойствами. ***Практическая значимость.*** Разработанный способ может быть использован при решении задач, требующих определения максимальной абсолютной погрешности, с которой модель представляет исходный объект. Это приближенные вычисления, построение графиков, описывающих процессы и явления, формирование моделей поверхностей по физическому образцу.

Ключевые слова: погрешность интерполяции; упорядоченное множество точек; осцилляция; монотонное изменение дифференциально-геометрических характеристик; область расположения кривой

ВИЗНАЧЕННЯ АБСОЛЮТНОЇ ПОХИБКИ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ КРИВОЇ С ЗАДАНИМИ ГЕОМЕТРИЧНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ

ГАВРИЛЕНКО Є. А. [1], *к.т.н, доц.*,
ХОЛОДНЯК Ю. В. [2*], *к.т.н.*,
НАЙДИШ А. В. [3*], *д.т.н., проф.*

[1] Кафедра інформаційних технологій проектування ім. В. М. Найдиша, Таврійський державний агротехнологічний університет, пр. Б. Хмельницького, 18, 72310, Мелітополь, Запорізька обл., Україна, ORCID ID: 0000-0003-4501-445X
[2*] Кафедра інформаційних технологій проектування ім. В. М. Найдиша, Таврійський державний агротехнологічний університет, пр. Б. Хмельницького, 18, 72310, Мелітополь, Запорізька обл., Україна, тел. +38 (0619) 42-68-62, e-mail: yuliya.kholodnyak@tsatu.edu.ua , ORCID ID: 0000-0001-8966-9269

[3*] Кафедра прикладної математики та інформаційних технологій, Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького, вул. Гетьманська, 20, 72312, Мелітополь, Запорізька обл., Україна, ORCID ID: 0000-0003-4057-7085

Анотація. ***Мета.*** Метою дослідження є розробка способу визначення абсолютної похибки інтерполяції точкового ряду неосцилюючою плоскою кривою лінією виходячи з умови монотонної зміни диференціально-геометричних характеристик уздовж вихідного геометричного образу. ***Методика.*** Проведений аналіз способів оцінки точності інтерполяції методами безперервного геометричного моделювання показав, що недоліки даних способів викликані рішенням порівнювати отриману модель з відомою наперед заданою функцією, що відрізняється від вихідної кривої, якій належить точковий ряд. У роботі запропоновано спосіб визначення точності інтерполяції, який засновується на формуванні кривої виходячи з її геометричних властивостей. Припущення, на основі якого формується крива, наступне: якщо існує крива лінія, яка інтерполює вихідний точковий ряд, та у цієї лінії відсутні особі точки (точки перегину, зміни напряму зростання удовж кривої значень кривини та ін.), то такі особі точки відсутні й у вихідного об’єкта. Розглядається дві складові виникнення похибки. Похибка, з якою сформована крива лінія, що інтерполює вихідний точковий ряд, представляє вихідну криву, оцінюється як область можливого розташування всіх кривих ліній, властивості яких ідентичні властивостям вихідної кривої. Інтерполююча крива лінія формується у вигляді згущеного точкового ряду, що складається із будь-якої кількості вузлів, визначених виходячи з умови можливості інтерполювати його кривою лінією з заданими характеристиками. Похибка формування інтерполюючої кривої лінії оцінюється як область можливого розташування кривої лінії, що інтерполює згущений точковий ряд. ***Результати.*** У даній роботі представлено розв’язок задачі для плоскої кривої виходячи з умови відсутності осциляції та умови монотонної зміни кривини. Область розташування кривої, визначена виходячи з умови опуклості кривої, максимальна та є вихідною. Накладання наступних умов: монотонна зміна кривини уздовж кривої та призначення фіксованих положень дотичних і значень кривини у вихідних точках, локалізує область можливого розв’язку. ***Наукова новизна.*** Розроблений спосіб оцінки точності інтерполяції кривої дає можливість визначити абсолютну похибку, з якою модель представляє вихідну криву, та похибку, з якою інтерполююча крива представляє будь-яку криву з заданими властивостями. ***Практична значимість.*** Розроблений спосіб може бути використаний при розв’язанні задач, що вимагають визначення максимальної абсолютної похибки, з якою модель представляє вихідний об’єкт. Це наближені обчислення, побудова графіків, що описують процеси та явища,формування моделей поверхонь по фізичному зразку.

***Ключові слова*:** похибка інтерполяції; упорядкована множина точок; осциляція; монотонна зміна диференціально-геометричних характеристик; область розташування кривої

DETERMINATION OF ABSOLUTE ERROR OF INTERPOLATION OF CURVE WITH GIVEN GEOMETRIC CHARACTERISTICS

GAVRYLENKO YE. A. [1], *Cand. Sc. (Tech.), Assoc. Prof.*
KHOLODNYAK YU. V. [2*], *Cand. Sc. (Tech.),*
NAIDYSH A. V. [3*], *Dr. Sc. (Tech.), Prof.*

[1] Department of Information Technology of Design named after V. M. Naidysh, Tavria State Agrotechnological University, B. Khmelnitsky Avenue, 18, 72310, Melitopol, Zaporizhia region, Ukraine, ORCID ID: 0000-0003-4501-445X
[2*] Department of Information Technology of Design named after V. M. Naidysh, Tavria State Agrotechnological University, B. Khmelnitsky Avenue, 18, 72310, Melitopol, Zaporizhia region, Ukraine, tel. +38 (0619) 42-68-62, e-mail: yuliya.kholodnyak@tsatu.edu.ua , ORCID ID: 0000-0001-8966-9269
[3*] Department of Applied Mathematics and Information Technologies, Melitopol State Pedagogical University named after Bohdan Khmelnytsky, Hetmanska str., 20, 72312, Melitopol, Zaporizhia region, Ukraine, ORCID ID: 0000-0003-4057-7085

Abstract. ***Purpose.*** The purpose of the research is to develop a method for determining of absolute error of interpolation of a point set by a non-oscillating plane curve from the condition of monotonous change of differential-geometric characteristics along the initial geometric image. ***Methodology***. Analysis of methods of estimating of accuracy of interpolation by the methods of continuous geometric modeling showed that disadvantages of these methods are caused by the decision to compare the obtained model with a known predefined function, which differs from the initial curve to which the points set belongs. The method of determining the accuracy of the interpolation, which is based on the formation of curve on the basis of its geometrical characteristics, is proposed in this article. The assumption, on the basis of which the curve is formed, is following: if there is a curve that interpolates the original points set and there are no singular points for this curve (an inflection point, points of change direction of curvature, torsion values, etc.), then there are no such singular points on the original object. Two components of the occurrence of error are considered. The error, with which the formed curve that interpolates the original points set represents the original curve, is estimated as the area of possible location of all curves whose characteristics are identical to those of the original curve. The interpolating curve is forming in the form of a condensed points set, which consists of an arbitrarily large number of points determined from the condition of the possibility of interpolating its curve by a line with given characteristics. The error of the formation of the interpolating curve is estimated as the area of possible location of the curve interpolating the condensed points set. ***Findings.*** The solution of the problem for a plane curve on the basis of the condition of absence of oscillations and the condition of monotonous change of curvature values is present in this article. The area of location of curve, which is determined by the condition of convexity of curve, is maximal and is the initial. Addition of the following conditions (monotonous change of curvature along the curve and assignment of fixed positions of tangents and curvature values at initial points) localizes the area of possible solution. ***Originality.*** The developed method for estimating of accuracy of interpolation of a curve makes it possible to determine the absolute error with which the model represents the initial curve and the accuracy with which the interpolating curve represents any curve with given properties. ***Practical value.*** The developed method can be used in solving of problems that require the determination of maximum absolute error with which the model represents the original object. It is approximate calculations, the construction of graphics that describe of processes and phenomena, the formation of models of surfaces on the physical sample.

Keywords: interpolation error; ordered points set; oscillation; monotonous change of differential-geometric characteristics; area of location of curve

Постановка проблемы

Геометрическое моделирование – один из инструментов исследования объектов, явлений и процессов. Задачей геометрического моделирования является определение свойств моделируемого объекта с помощью характеристик соответствующих геометрических образов. Исходными данными являются дискретные множества, которые отображают характер исследуемого объекта. Дискретные данные могут быть получены в результате расчетов или проведения замеров на физических объектах.

Трудности изучения таких множеств связаны с тем, что значения характеристик известны только в конкретных точках. Характер изменения параметров между исходными точками можно определять исходя из дополнительной информации о свойствах моделируемого объекта.

Одним из методов моделирования на основе дискретных множеств является интерполяция. Задача интерполяции заключается в восстановлении с заданной точностью неизвестной функции (кривой) по ее значениям, заданным на дискретном множестве точек [1]. В общем случае точно восстановить исходную кривую невозможно. Важным этапом решения этой задачи является выбор методов интерполяции, обеспечивающих необходимую точность. Различают две составляющие возникновения погрешности: погрешность дискретизации и погрешность интерполяции.

Погрешность дискретизации возникает в результате представления исходного объекта в виде дискретного множества точек. Погрешность дискретизации увеличивается при неудачном расположении исходных точек на геометрическом образе, когда точечный ряд не отображает наличие особых участков (перемены выпуклости-вогнутости, смена хода и др). Погрешность дискретизации неизбежна и не зависит от метода, выбранного для дальнейшей интерполяции, и не может быть устранена в ходе моделирования. Данная погрешность может быть уменьшена путем увеличения числа исходных точек дискретного множества. Увеличение числа исходных точек увеличивает объем вычислений и может увеличить вычислительную погрешность. Шаг дискретизации целесообразно выбирать как можно большим, но удовлетворяющим требованиям к точности моделирования. Известные способы интерполяции не позволяют определить шаг дискретизации исходя из заданной точности.

Разнообразие факторов, влияющих на погрешность интерполяции, затрудняет ее количественную оценку. Разработка методов интерполяции, обеспечивающих заданную точность является актуальной задачей моделирования.

Анализ последних исследований и публикаций

На данный момент наиболее разработаны методы интерполяции на основе аналитически заданных функций (непрерывные методы интерполяции). К таким методам относятся методы глобального моделирования [7,9-11], когда геометрический образ определяется одним уравнением, и методы кусочно-гладких приближений [3,6], когда обвод формируется из участков аналитически заданных кривых, состыкованных в исходных точках. Точность, с которой сформированная модель представляет исходный объект, оценивается как отклонение модели от любой известной функции, интерполирующей тот же точечный ряд.

Например, в работах [7,10,11] предложены методы построения интерполяционных полиномов путем отыскания уравнения кривой $P_n(x)$, которая интерполирует весь точечный ряд, принадлежащий дискретно представленному геометрическому образу. Исходная функция известна и имеет непрерывную $n+1$-ую производную. Погрешность интерполяции оценивается как максимальное отклонение полученного полинома $P_n(x)$ от исходной функции $f(x)$

$$\varepsilon = \left| f(x) - P_n(x) \right| \le \frac{\left|(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)\right|}{(n+1)!} \cdot M_{n+1},$$

где $x_0, x_1, \ldots x_n$ – абсциссы точек исходного дискретного множества; n – количество точек исходного дискретного множества; $M_{n+1} = \max\left| f^{(n+1)}(x) \right|$ – максимальное значение $(n+1)$ -ой производной функции $f(x)$ на исследуемом отрезке.

В другом примере [9] погрешность интерполяции оценивается как величина отклонения полинома $P_n(x)$, интерполирующего дискретное множество, состоящее из n точек, от полинома $P_{n+1}(x)$, интерполирующего множество, состоящее из $n+1$ точки на этом же отрезке.

Указанные способы оценки погрешности интерполяции могут применяться при решении тестовых примеров с целью проверки эффективности метода интерполяции. Предполагается, что при решении других задач порядок погрешности будет таким же, как и при решении тестовых примеров. В общем случае, когда исходная функция неизвестна, такое предположение может быть неверным. Это связано с тем, что не учитывается отклонение исходной функции от звеньев ломаной линии, соединяющей последовательные точки дискретного множества.

Примером может служить функция Рунге вида $R(x)= 1\big/\left(1+25x^2\right)$ [1], график которой представлен на рис. 1. Полином $P_5(x)$, который интерполирует точечный ряд, принадлежащий $R(x)$, не отображает наличие точки перемены возрастания-убывания радиусов кривизны вдоль кривой, на участке между точками 5 и 7. Этот недостаток можно устранить увеличив количество точек, принадлежащих исходной кривой. В этом случае уменьшается погрешность дискретизации, а отклонение интерполирующего полинома от хорд сопровождающей ломаной линии (СЛЛ), соединяющей последовательные исходные точки, увеличивается. Неустойчивость интерполяции связана с увеличением степени полинома при увеличении числа интерполируемых точек. При этом отклонение интерполирующей функции от хорд СЛЛ максимально на краях отрезка интерполирования. На рис. 1 на краях отрезка [-1;1] отклонение от исходной функции полинома $P_{10}(x)$ превышает отклонение полинома $P_5(x)$. Эта особенность определена аналитическим описанием всего геометрического образа целиком.

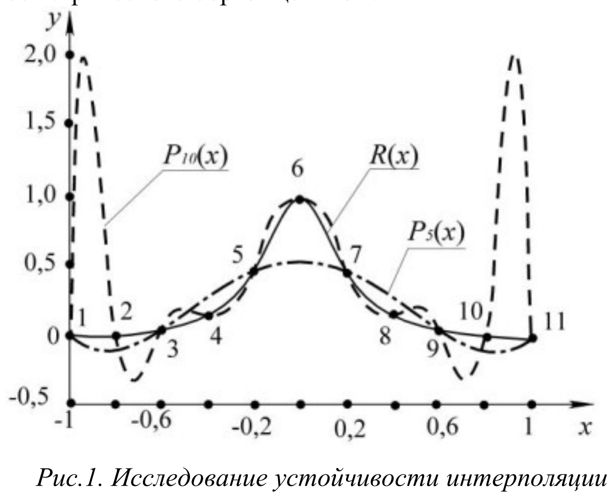

Рис.1. Исследование устойчивости интерполяции / Investigation of the stability of interpolation

Указанный недостаток частично устранен при интерполировании методами кусочно-гладких приближений, например, методом кривых второго порядка [6]. Данные методы позволяют обеспечивать отсутствие незапланированных точек перегиба внутри участков кривой. Это способствует уменьшению абсолютной погрешности интерполяции.

В случае, когда предотвращение осцилляции не обеспечивает заданной точности моделирования, необходимо наложение более жестких требований к закономерности изменения геометрических характеристик вдоль формируемого обвода. Это может быть монотонное изменение значений кривизны, кручения, радиусов соприкасающихся сфер.

Недостатком методов кусочно-гладких приближений является сложность обеспечения качества стыковки участков кривых в исходных точках (наличие в точке стыковки общей касательной, соприкасающейся окружности и т.д.). При решении ряда практических задач (проектирование поверхностей рабочих органов сельскохозяйственных машин, лопаток турбин, каналов двигателей внутреннего сгорания и т.д.) качество стыковки участков обвода является важным условием.

Нерешенные части проблемы

Недостатки известных способов оценки точности интерполяции вызваны решением сравнивать полученную модель с эталоном, выбор которого может оказаться неудачным.

Другой подход к оценке точности интерполяции может быть основан на формировании кривой исходя из ее предполагаемых геометрических свойств.

Основное предположение, на основе которого формируется геометрическая модель, следующее: если существует кривая линия, интерполирующая исходный точечный ряд, и у этой линии отсутствуют особые точки (точки перегиба, смены направления возрастания вдоль кривой значений кривизны, кручения и т.д.), то такие особые точки отсутствуют и у исходного объекта.

Исходный точечный ряд разбивается на участки, которые возможно интерполировать кривой линией, вдоль которой значения геометрических характеристик монотонно возрастают или убывают. Определяется область пространства, внутри которой располагаются все кривые линии с заданными геометрическими свойствами. Максимальная абсолютная погрешность интерполяции определяется исходя из размеров области возможного по условиям задачи решения.

Формирование модели на основе известных геометрических характеристик исходного объекта требует определения границ возможного расположения линейных элементов модели, разработки способов оценки и корректировки исходных условий в соответствии с заданной максимальной абсолютной погрешностью моделирования.

Формулировка цели статьи

Целью исследования является разработка способа оценки точности интерполяции точечного ряда неосциллирующей плоской кривой линией исходя из условия монотонного изменения дифференциально-геометрических характеристик вдоль исходного геометрического образа.

Основная часть

Исходная плоская кривая представлена упорядоченным множеством принадлежащих ей точек. Максимальную абсолютную погрешность, с которой кривая, интерполирующая точечный ряд, представляет исходную кривую линию, в первом приближении определим исходя из условия отсутствия осцилляции у кривых.

Если каждые три последовательные исходные точки расположены таким образом, что их обход осуществляется по часовой стрелке, то полагаем, что точечный ряд принадлежит выпуклой кривой линии. Исходный точечный ряд разбивается на участки, принадлежащие выпуклым и вогнутым участкам исходной кривой, и интерполируется отдельно по этим участкам.

Любая выпуклая кривая линия, интерполирующая точечный ряд, расположена в пределах цепочки базисных треугольников, ограниченных хордой, соединяющей соседние исходные точки, и касательными к кривой (t_i) в этих точках (рис. 2).

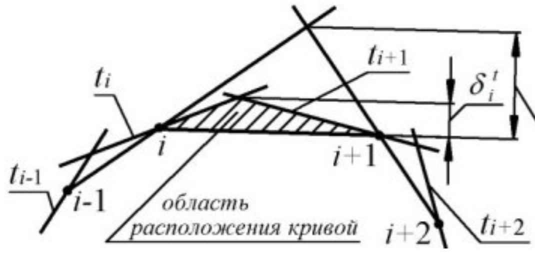

Рис. 2. Область расположения выпуклой кривой / The area of position of the convex curve

Максимальное отклонение интерполирующей кривой от исходной не может превышать высоту базисного треугольника (δ_i^t) на каждом из участков. В случае, когда интерполирующая кривая формируется как обвод нулевого порядка фиксации (заданы только координаты исходных точек) абсолютную погрешность интерполяции можно оценивать высотой треугольников, ограниченных прямыми, проходящими через три пары последовательных точек (δ_i^h).

Оценка точности интерполяции через определение высоты базисных треугольников целесообразна при формировании обводов методами, обеспечивающими контроль возникновения осцилляции. Это метод кривых второго порядка, кривых Безье, B-сплайнов, методы дискретной интерполяции [3,4].

Другим условием, позволяющим уменьшить область возможного расположения кривой и повысить точность интерполяции, является условие монотонного изменения значений кривизны вдоль кривой. Такую кривую линию будем называть монотонной.

Через каждые три последовательные исходные точки проводится окружность, которую будем называть прилегающей (*ПО$_i$*). Если радиусы прилегающих окружностей монотонно возрастают или убывают вдоль точечного ряда, то такой точечным ряд возможно интерполировать кривой линией с монотонным убыванием или возрастанием кривизны соответственно [5].

Исходный точечный ряд разбивается на участки с монотонным изменением радиусов прилегающих окружностей и интерполируется отдельно по этим участкам монотонными кривыми линиями.

Погрешность интерполяции оценивается исходя из условия монотонного изменения значений кривизны вдоль соответствующих участков исходной кривой. Любая кривая линия, интерполирующая исходный точечный ряд, вдоль которой радиусы кривизны монотонно возрастают или убывают, располагается в пределах области, ограниченной последовательными прилегающими окружностями (рис. 3) [5].

Рис. 3. Область расположения монотонной кривой / The area of position of the monotonous curve

Абсолютную погрешность интерполяции можно оценивать длиной отрезка ($\delta_i^м$), ограниченного точками пересечения прямой, проходящей через середину хорды, соединяющей соседние исходные точки перпендикулярно хорде с прилегающими окружностями, ограничивающими область возможного расположения кривой на данном участке.

В таблице 1 приведены значения абсолютной погрешности интерполяции, определенные для точечного ряда, принадлежащего параболе.

Таблица 1

Значение абсолютной погрешности представления исходной кривой точечным рядом / The absolute error of the representation of the initial curve by a points set

Номер участка, $i \ldots i+1$	Длина хорды $h_i=\|i;i+1\|$, мм	Абсолютная погрешность, мм	
		δ_i^t	$\delta_i^м$
1…2	34,73	8,9638	3,68
2…3	48,2689	5,0317	2,445
3…4	53,3896	1,6393	0,549
4…5	51,3769	0,7093	0,1557
5…6	34,5599	0,2498	0,0243

Значения абсолютной погрешности, определенные на основе базисных треугольников

(δ_i^t) превышают значения, определенные на основе прилегающих окружностей ($\delta_i^м$) приблизительно в 2-3 раза.

Погрешность, определенная на основе исходного точечного ряда (δ_i^t, $\delta_i^м$) равна максимально возможному отклонению формируемой неосциллирующей кривой от исходной кривой. Эту погрешность можно рассматривать как погрешность дискретизации и ее можно уменьшить за счет увеличения числа исходных узлов. Уплотнение в два раза точечного ряда, характеристики которого приведены в таблице 1, приводит к уменьшению погрешности δ_i^t приблизительно в 2-3 раза, а $\delta_i^м$ – в 5-8 раз (таблица 2).

Таблица 2

Значение абсолютной погрешности представления исходной кривой точечным рядом, состоящим из удвоенного числа узлов / The absolute error of representing the initial curve by a points set consisting of a doubled number of points

Номер участка, $i…i$+1	Длина хорды h_i=|$i;i$+1|, мм	Абсолютная погрешность, мм	
		δ_i^t	$\delta_i^м$
1…2	16,543	3,235737	0,6642
2…3	19,0156	3,377989	0,6934
3…4	26,5936	1,760375	0,4277
4…5	21,7418	0,469214	0,114
5…6	29,1832	0,523739	0,0877
6…7	24,2287	0,210213	0,0352
7…8	28,0646	0,238711	0,0262
8…9	23,3155	0,101133	0,0111
9…10	16,7419	0,168795	0,00821
10…11	17,8184	0,105677	0,00514

Ограничение максимальной абсолютной погрешности представления исходной кривой обеспечивает контроль размеров и формы формируемой модели в первом приближении. При решении практических задач допустимые значения этой погрешности могут назначаться исходя из возможностей измерительного оборудования, требований компоновки или допустимых отклонений массы и размеров моделируемого объекта относительно аналогичных характеристик прототипа.

При оценке точности формирования модели допустимые значения погрешности могут определяться исходя из других условий. Это может быть точность, которую способно обеспечить обрабатывающее оборудование или специальные требования к качеству изготовления поверхностей изделия. Например, рабочие поверхности изделий, функциональное назначение которых – взаимодействие со средой, должны обеспечивать ламинарный характер их обтекания. Погрешность интерполяции при формировании линейных элементов геометрической модели таких поверхностей зависит от скорости их контакта с потоком среды и может измеряться долями микрона. В общем случае допустимая погрешность последующей интерполяции может быть на порядки меньшей, чем погрешность представления исходной кривой линии.

Погрешность интерполяции можно снизить, уменьшив область возможного расположения кривой за счет увеличения порядка фиксации формируемого обвода. Все монотонные кривые, интерполирующие последовательность узлов, в которых назначены фиксированные положения касательных (t_i) и значения радиусов кривизны (R_i) на участке ($i…i$+1) располагаются внутри области, ограниченной двумя коробовыми линиями окружностей [2]. Каждая из границ состоит из двух дуг окружностей, одна из которых соприкасающаяся окружность монотонной кривой в точке, ограничивающей участок (рис. 4).

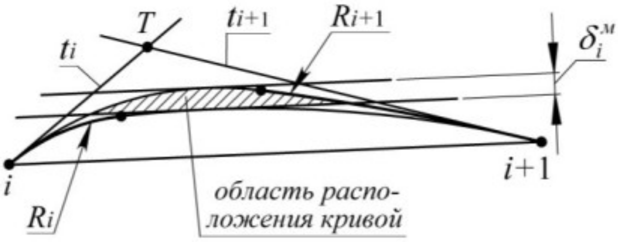

Рис. 4. Область возможного расположения обвода второго порядка фиксации / The area of possible location of second-order fixing countour

Отклонение обвода второго порядка фиксации с монотонным изменением кривизны от исходной кривой на участке ($i…i$+1) не может превышать максимальную ширину области возможного расположения кривой – $\delta_i^м$ (рис. 4).

Значения абсолютной погрешности интерполяции для участков обвода второго порядка фиксации представлены в таблице 3.

Таблица 3

Значение абсолютной погрешности интерполяции обводом второго порядка фиксации / The absolute error of interpolation by second-order fixing countour

Номер участка, $i…i$+1	Длина хорды h_i=|$i;i$+1|, мм	Абсолютная погрешность, $\delta_i^м$, мм
1…2	34,73	0,588085
2…3	48,2689	0,432897
3…4	53,3896	0,104214
4…5	51,3769	0,032136
5…6	34,5599	0,005712

В качестве исходных данных взят точечный ряд, рассматриваемый в предыдущем примере (таблица 1). Положение касательной к обводу в i-й точке определено как среднее из положений касательной к прилегающей окружности, проходящей через точки i-1, i и i+1 (*ПО*(i-1,i,i+1)), и ближайшей по расположению касательной к *ПО*(i-2,i-1,i) или

$ПО(i,i+1,i+2)$. Значение радиуса кривизны обвода в i-й точке (R_i) назначено исходя из условия расположения точечного ряда, в узлах которого значения радиусов кривизны обвода меньше R_i, внутри i-й соприкасающейся окружности. Выполнение указанных условий позволяет формировать обвод второго порядка фиксации с монотонным изменением кривизны [2].

Повышение порядка фиксации обвода до второго уменьшило абсолютную погрешность на участках кривой в среднем в 4-6 раз.

Оценка точности интерполяции, исходя из условия возрастания или убывания значений кривизны вдоль гладкой кривой, возможна при моделировании обводов методами формирования монотонных кривых. Из известных нам – это методы, разработанные в рамках вариативного дискретного геометрического моделирования [2,5,8].

Создаваемые в рамках направления методы объединяют следующие особенности. Формируемая кривая представлена упорядоченным множеством принадлежащих ей точек и геометрическими характеристиками кривой. Эти характеристики необходимо обеспечить в процессе моделирования. Такую кривую будем называть дискретно представленная кривая. Кривая формируется на основе любого точечного ряда по участкам, на которых возможно обеспечить монотонное изменение ее характеристик. Монотонные участки стыкуются с заданным порядком гладкости.

Кривая формируется сгущением, предполагающим определение для исходного точечного ряда промежуточных точек. Точки сгущения назначаются внутри области возможного расположения кривой с заданными геометрическими характеристиками. В процессе сгущений точечного ряда область расположения последовательно локализуется. По достижению заданной точности узлы сформированного точечного ряда соединяются хордами. Окончательное решение представлено в виде сопровождающей ломаной линии, состоящей из сколь угодно большого числа хорд, расстояние от которых до кривой линии с заданными геометрическими характеристиками не превышает заранее заданную сколь угодно малую величину.

Выводы и перспективы дальнейшего развития

Линейная интерполяция с заданной абсолютной погрешностью требует определения области возможного расположения дискретно представленной кривой линии.

Область может быть определена исходя из предполагаемых свойств исходной кривой и соответствующих им заданных свойств интерполирующей кривой.

В данной работе представлено решение задачи для плоской гладкой кривой исходя из условия отсутствия осцилляции и условия монотонного изменения кривизны. Выбранные условия являются универсальными, так как любую кривую линию возможно разбить на участки, вдоль которых значения кривизны монотонно возрастают или убывают. Корректность выбранного подхода подтверждает наличие многих задач, требующих использования геометрических образов с закономерно изменяющимися характеристиками. Это приближенные вычисления, построение графиков, формирование моделей поверхностей. В то же время задачи, для решения которых требуются геометрические образы с непредсказуемым характером изменения характеристик, немногочисленны.

Погрешность интерполяции, определенная исходя из условия выпуклости кривой, максимальна и является исходной. Наложение более жестких условий: монотонное изменение значений кривизны вдоль кривой и назначение фиксированных характеристик в исходных точках локализует область возможного решения.

Формирование обводов с указанными характеристиками обеспечивают несколько методов вариативного дискретного геометрического моделирования.

Интерполирующая кривая формируется в виде сгущенного точечного ряда по участкам, которые возможно интерполировать кривой с монотонным изменением кривизны. Точки сгущения назначаются исходя из условия существования области возможного расположения кривой с заданными характеристиками. Область возможного решения локализуется в результате последовательных сгущений точечного ряда. Это позволяет интерполировать точечный ряд произвольной конфигурации. Увеличение числа исходных точек уменьшает абсолютную погрешность, с которой интерполирующая кривая представляет исходную кривую, но не приводит к накоплению вычислительной погрешности или неконтролируемому возникновению особых точек.

Сформированный точечный ряд может состоять из любого сколь угодно большого количества узлов и представлять кривую линию с заданными геометрическими характеристиками, область возможного расположения которой определена со сколь угодно малой абсолютной погрешностью.

Дальнейшее увеличение точности интерполяции требует наращивания условий, накладываемых на формируемую кривую. Для плоской интерполяции следующим шагом может быть обеспечение контроля за скоростью возрастания кривизны вдоль кривой. Линейная интерполяция с заданной точностью пространственных точечных рядов требует формирования одномерных обводов с закономерным изменением кривизны, кручения, радиусов соприкасающихся сфер.

Разработка методов формирования интерполирующей кривой на основе заданных геометрических характеристик и области возможного расположения позволяют свести задачу точности геометрического моделирования к решению технических вопросов – способности оборудования обеспечить необходимую точность измерений и расчетов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – [6-е изд.] – Москва: БИНОМ, 2008. – 636 с.
2. Гавриленко Є.А. Визначення діапазонів геометричних характеристик монотонної дискретно представленої кривої / Є.А. Гавриленко, Ю.В. Холодняк // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету / ТДАТУ. – Мелітополь, 2012. – Вип. 4: Прикладна геометрія та інженерна графіка, т. 54. – С.38–42.
3. Григорьев М. И. Полиномы Бернштейна и составные кривые Безье / М. И. Григорьев, В. Н. Малозёмов, А. Н. Сергеев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – Москва: Наука, 2006. – Т. 46, № 11. – С. 1962–1971.
4. Найдиш В. М. Дискретна інтерполяція / В. М. Найдиш. – Мелітополь: Люкс, 2008. – 250 с.
5. Холодняк Ю. В. Формування геометричних характеристик при моделюванні монотонної дискретно представленої кривої / Ю. В. Холодняк, Є. А. Гавриленко // Прикладна геометрія та інженерна графіка: міжвід. наук.-техн. збірник / Київський національний університет будівництва та архітектури. – Київ, 2013. – Вип. 91. – С. 292-296.
6. Чудинов А. В. Теоретические основы инженерной графики / А. В. Чудинов. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2010. – 396 с.
7. Chernousova E. Ordered smoothers with exponential weighting / E. Chernousova, Y. Golubev, E. Krymova // Electronic Journal of Statistics. – 2013. – Vol. 7. – P. 2395–2419. Режим доступу: https://projecteuclid.org/euclid.ejs/1380546591. Назва з екрана. – Перевірено: 22.09.2017.
8. Gavrilenko E. A. Discretely geometrical modelling of one-dimensional contours with a regular change of differential-geometric characteristics / E. A. Gavrilenko, Yu. V. Kholodnyak // Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics). – Omsk, 2014. – P. 1-5. Режим доступу: http://ieeexplore.ieee.org/document/7005654/. Назва з екрана. – Перевірено: 22.09.2017.
9. Argyros Ioannis K. On the convergence of Newton-like methods restricted domains / Ioannis K. Argyros, Santhosh George // Numerical Algorithms. – 2017. – Vol. 75, Issue 3. – P. 553-567. Режим доступу: https://link.springer.com/article/10.1007/s11075-016-0211-y. Назва з екрана. – Перевірено: 22.09.2017.
10. Ivan Mircea A note on the Hermite interpolation / Mircea Ivan // Numerical Algorithms. –2015. – Vol. 69, Issue 3. – P. 517-522. Режим доступу: https://link.springer.com/article/10.1007/s11075-014-9909-x. Назва з екрана. – Перевірено: 22.09.2017.
11. Zadorin I. Lagrange interpolation and Newton-Cotes formulas for functions with boundary layer components on piecewise-uniform grids / I. Zadorin // Numerical Analysis and Applications. – 2015. – Vol. 8, Issue 3. – P. 235–247. Режим доступу: https://link.springer.com/article/10.1134/S1995423915030040. Назва з екрана. – Перевірено: 22.09.2017.

REFERENCES

1. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P. and Kobelkov G.M. *Chislenyie metody* [Numerical methods]. Moscow: BINOM, 2008, 636 p. . (in Russian).
2. Havrylenko Ye.A. and Kholodniak Yu.V. *Vyznachennia diapazoniv heometrychnykh kharakterystyk monotonnoi dyskretno predstavlenoi kryvoi* [The definition of diapasons of geometric characteristics of a monotonous discretely represented curve]. *Pratsi Tavriiskogo derzhavnogo agrotekhnologichnogo universytetu* [Proceedings of Tavria State Agrotechnological University]. TDATU. Melitopol, 2012, no. 4, iss. 54, pp. 38-42. (in Ukrainian).
3. Grigoryev M.I., Malozemov V.N. and Sergeyev A.N. *Polinomy Bernshteyna i sostavnye krivye Bezye* [Bernstein polynomials and composite Bezier curves]. *Zhurnal vychislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics]. Moskva, 2006, Iss. 43, no. 11, pp. 1962-1971. (in Russian).
4. Naidysh V.M. *Dyskretna* interpoliatsiia [Discretely interpolation]. Melitopol: Liuks, 2008, 250 p. . (in Ukrainian).
5. Kholodnyak Yu.V. and Gavrylenko Ye.A. *Formuvannya geometrichnikh kharakteristik pry modelyuvanni monotonnoi dyskretno predstavlenoi kryvoi* [Formation of geometrical characteristics at modeling of the monotonic discretely represented curve]. *Prikladna geometriya ta inzhenerna grafika* [Applied geometry and engineering graphics]. KNUBA. Kyiv, 2013, no. 91, pp. 292-296. (in Ukrainian).
6. Chudinov A.V. *Teoreticheskie osnovy inzhenernoy grafiki* [Theoretical foundations of engineering graphics]. Novosibirsk: Izd-vo NGTU, 2010, 396 p. . (in Russian).
7. Chernousova E., Golubev Y. and Krymova E. *Ordered smoothers with exponential weighting*. *Electronic Journal of Statistics*. 2013, vol. 7, pp. 2395–2419. Available at: https://projecteuclid.org/euclid.ejs/1380546591.
8. Gavrilenko E.A. and Kholodnyak Yu.V. *Discretely geometrical modelling of one-dimensional contours with a regular change of differential-geometric characteristics*. *Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics*). Omsk, 2014, pp. 1-5. Available at: http://ieeexplore.ieee.org/document/7005654/.
9. Argyros Ioannis K. and George Santhosh *On the convergence of Newton-like methods restricted domains*. *Numerical Algorithms*. 2017, vol. 75, iss. 3, pp. 553-567. Available at: https://link.springer.com/article/10.1007/s11075-016-0211-y.
10. Ivan Mircea *A note on the Hermite interpolation*. *Numerical Algorithms*. 2015, vol. 69, iss. 3, pp. 517-522. Available at: https://link.springer.com/article/10.1007/s11075-014-9909-x.
11. Zadorin I. *Lagrange interpolation and Newton-Cotes formulas for functions with boundary layer components on piecewise-uniform grids*. *Numerical Analysis and Applications*. 2015, vol. 8, iss. 3, pp. 235–247. Available at: https://link.springer.com/article/10.1134/S1995423915030040