УДК 519.85

ОПТИМАЛЬНОЕ РЕЗЕРВИРОВАНИЕ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ СО СКОЛЬЗЯЩИМ РЕЗЕРВОМ

ДОВГОПОЛАЯ А. А.[1*], *аспирант,*
КОСОЛАП А. И.[2*], *д. физ-мат. н., проф.,*

[1*] Кафедра специализированных компьютерных систем, Государственное высшее учебное заведение «Украинский государственный химико-технологический университет», ул. Набережная Победы, 40, 49005, Днепропетровск, Украина, тел. +38 (0562) 7535726, e-mail: dovgopolaya09@mail.ru, ORCID ID: 0000-0002-5485-9721
[2*] Кафедра специализированных компьютерных систем, Государственное высшее учебное заведение «Украинский государственный химико-технологический университет», ул. Набережная Победы, 40, 49005, Днепропетровск, Украина, тел. +38 (0562) 7535726, e-mail: anivkos@ua.fm, ORCID ID: 0000-0001-73386707

Аннотация. ***Цель.*** В работе рассматривается задача оптимального резервирования систем управления со скользящим резервом. Такие задачи возникают при проектировании сложных систем. Для повышения надежности функционирования таких систем ее элементы дублируются. Это увеличивает стоимость системы и повышает ее надежность. Математическая модель задачи резервирования со скользящим резервом является дискретной и многоэкстремальной. Для поиска глобального экстремума в настоящее время используются методы ветвей и границ, динамического программирования, случайного поиска. Эти методы гарантируют получение только локальных решений и используются в задачах резервирования малой размерности. ***Методика.*** В работе для решения задач резервирования используется новый метод точной квадратичной регуляризации. ***Результаты.*** Метод точной квадратичной регуляризации позволяет преобразовать исходную дискретную многоэкстремальную задачу к максимизации нормы вектора на выпуклом множестве. Это означает, что все многообразие задач резервирование приводится к задаче максимизации нормы вектора на выпуклом множестве. Для решения преобразованной задачи используется прямо-двойственный метод внутренней точки. ***Научная новизна.*** В настоящее время, это лучший метод для локальной оптимизации нелинейных задач. Преобразованная задача содержит новую вспомогательную переменную, которая определяется методом дихотомии. ***Практическая значимость.*** Были проведены многочисленные сравнительные численные эксперименты в задачах оптимального резервирования систем управления со скользящим резервом. Эти эксперименты подтверждают эффективность метода точной квадратичной регуляризации для решения задач оптимального резервирования систем управления со скользящим резервом.

Ключевые слова: системы резервирования; оптимизация; многоэкстремальные задачи; метод точной квадратичной регуляризации; скользящий резерв

ОПТИМАЛЬНЕ РЕЗЕРВУВАННЯ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ З КОВЗАЮЧИМ РЕЗЕРВОМ

ДОВГОПОЛА А. О.[1*], *аспірант,*
КОСОЛАП А. І.[2*], *д. фіз-мат. н., проф.,*

[1*] Кафедра спеціалізованих компютерних систем, Державний вищий навчальний заклад «Український державний хіміко-технологічний університет», вул. Набережна Перемоги, 40, 49005, Дніпропетровськ, Україна, тел. +38 (0562) 7535726, e-mail: dovgopolaya09@mail.ru, ORCID ID: 0000-0002-5485-9721
[2*] Кафедра спеціалізованих компютерних систем, Державний вищий навчальний заклад «Український державний хіміко-технологічний університет», вул. Набережна Перемоги, 40, 49005, Дніпропетровськ, Україна, тел. +38 (0562) 7535726, e-mail: anivkos@ua.fm, ORCID ID: 0000-0001-73386707

Анотація. Мета. У роботі розглядається задача оптимального резервування систем управління з ковзаючим резервом. Такі задачі виникають при проектуванні складних систем. Для підвищення надійності функціонування таких систем її елементи дублюються. Це збільшує вартість системи і підвищує її надійність. Математична модель задачі резервування з ковзаючим резервом є дискретною та багатоекстремальною. Для пошуку глобального екстремуму в даний час використовуються методи розгалуджень та границь, динамічного програмування, випадкового пошуку. Ці методи гарантують отримання тільки локальних розв'язків і використовуються в задачах резервування малої розмірності. ***Методика.*** У роботі для вирішення завдань резервування використовується новий метод точної квадратичної регуляризації. ***Результати.*** Метод точної квадратичної регуляризації дозволяє перетворити вихідну дискретну багатоекстремальну задачу до максимізації норми вектора на опуклій множині. Це означає, що все різноманіття завдань резервування приводиться до задачі максимізації норми вектора на опуклій множині. Для вирішення перетвореної завдачі використовується прямо-двоїстий метод внутрішньої точки. ***Наукова новизна.*** В даний час, це кращий метод для локальної оптимізації нелінійних задач. Перетворена задача містить нову допоміжну змінну, яка визначається методом дихотомії. ***Практична значимість.*** Були проведені численні порівняльні чисельні експерименти в задачах оптимального резервування систем управління з

ковзаючим резервом. Ці експерименти підтверджують ефективність методу точної квадратичної регуляризації для розв’язання задач оптимального резервування систем управління з ковзаючим резервом.

Ключові слова: системи резервування, оптимізація; багатоекстремальні задачі; метод точної квадратичної регуляризації; ковзаючий резерв

OPTIMAL RESERVATION OF CONTROLSYSTEMS WITH SLIDING RESEVE

DOVGOPOLA A. O.[2*], *PhD student*
KOSOLAP A. I.[1*], *Dr. Sc. (Phys.-Math.), Prof.*

[1*] Department of specialized computer systems, State Higher Education Establishment “Ukrainian State University of Chemical Technology”, 40, Naberezhna Peremogy str., Dnipropetrovsk 49005, Ukraine, tel. +38 (0562) 7535726, e-mail: dovgopolaya09@mail.ru, ORCID ID: 0000-0002-5485-9721
[2*] Department of specialized computer systems, State Higher Education Establishment “Ukrainian State University of Chemical Technology”, 40, Naberezhna Peremogy str., Dnipropetrovsk 49005, Ukraine, tel. +38 (0562) 7535726, e-mail: anivkos@ua.fm, ORCID ID: 0000-0001-73386707

Abstract. ***Purpose.*** We consider the problem of optimal reservation of control systems with sliding reserve. Such problems arise in the design of complex systems. To improve the reliability of operation of such systems of its elements are duplicated. This increases system cost and improves its reliability. A mathematical model whith sliding reseve of the problem is a discrete backup multiextremal. To search for the global extremum of currently used methods of branches and bounds, dynamic programming, random search. These methods guarantee a just and local solutions are used in the backup tasks of small dimension. ***Methodology***. In the work for solving redundancy uses a new method for accurate quadratic regularization. ***Findings.*** This method allows you to convert the original discrete problem to the maximization of multi vector norm on a convex set. This means that the diversity of the tasks given to the problem of redundancy maximize vector norm on a convex set. To solve the problem, a reformed straight-dual interior point methods. ***Originality.*** Currently, it is the best method for local optimization of nonlinear problems. Transformed the task includes a new auxiliary variable, which is determined by dichotomy. ***Practical value.*** There have been numerous comparative numerical experiments in problems of optimal reservation of control systems with sliding reseve. These experiments confirm the effectiveness of the method of precise quadratic regularization for solving problems of optimal reservation of control systems with sliding reseve.

Keywords: backup system; optimization; multiextremal problems; the exact method of quadratic regularization; sliding reseve

Введение

Управление функционированием сложных систем возможно человеком, автоматизированной или автоматической системой. Наиболее надежными, где это возможно, являются автоматические системы управления. Но и эти системы могут выходить со строя, что влечет за собой нежелательные последствия, аварии, стихийные бедствия, гибель людей. Для избегания этих последствий необходимо проектировать и разрабатывать сложные системы управления. Такие системы управления состоят из множества элементов с заданной вероятностью безотказной работы. Расчет вероятности безотказной работы системы управления зависит от структуры соединения ее элементов [1-6]. Увеличение этой вероятности возможно посредством выбора соответствующей структуры соединения элементов, а также их дублированием. Естественно, что заданная вероятность безотказной работы системы управления должна обеспечиваться ее минимальной стоимостью. Резервирование элементов возможно поэлементное или для групп элементов. В последнем случае говорят о скользящем резервировании.

Таким образом, проектирование надежной системы управление приводит к необходимости численного решения оптимизационной задачи. В этой задаче определяется минимальная стоимость системы при вероятности ее безотказной работы не меньше заданной и, как правило, при заданных вероятностях безотказной работы каждого элемента и известной структуре соединения элементов. Возможны и более общие постановки задачи с неизвестными вероятностями безотказной работы элементов или неизвестной структурой, которые определяются из решения соответствующей оптимизационной задачи. Однако такие задачи сложны для численного решения. Численно сложна для решения и исходная оптимизационная задача, так как содержит невыпуклое ограничение заданной вероятности безотказной работы системы управления. Это ограничение порождает многоэкстремальность задачи, а решения таких задач в настоящее время является проблемой. Поэтому в литературе по надежности систем управления с резервированием ограничиваются задачами с малым числом элементов или же используют для решения оптимизационных задач стохастические методы, которые только иногда приводят к оптимальным решениям [1-2, 5-7].

Цель

Целью данной работы является использование нового метода точной квадратичной регуляризации для решения многоэкстремальных задач систем резервирования [1]. Этот метод показал свою эффективность при решении многих тестовых задач и применим для решения многоэкстремальных задач большой размерности.

Постановка задачи

Пусть $R(x)$ – вероятность безотказной работы системы, где x – целочисленный вектор, компонентами которого являются количества резервных элементов для каждого основного элемента системы. Известна также функция стоимости $C(x)$ всех элементов системы. Тогда возможны постановки нескольких вариантов задач оптимального резервирования [3-4]. В задаче

$$\max\{R(x) \mid C(x) \le C_0, x \ge 1, x \in N\}, \tag{1}$$

максимизируется вероятность $R(x)$ безотказной работы системы управления при ограничении на ее стоимость, где N – множество натуральных чисел. Обратной к задаче (1) является следующая

$$\min\{C(x) \mid R(x) \ge R_0, x \ge 1, x \in N\} \tag{2}$$

в которой минимизируется стоимость $C(x)$ системы управления при заданной вероятности безотказной работы. Часто сложная система разбивается на подсистемы и для каждой подсистемы задача (1) либо (2) имеют свои ограничения данного вида.

Постановка задачи (2) является более естественной, так как для системы управления, как правило известна требуемая вероятность безотказной работы. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать задачу (2).

Таким образом, для решения задачи оптимального резервирования элементов системы необходимо определить функции $R(x)$ и $C(x)$. Функцию стоимости системы $C(x)$ чаще всего выбирают линейной. Определение функции $R(x)$ покажем на примере системы резервирования (рис. 1).

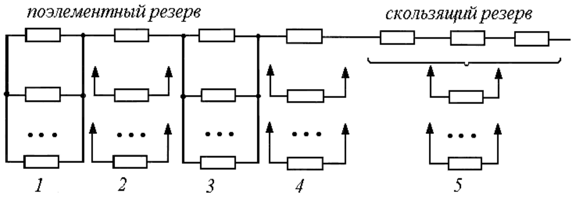

Рис. 1. Структурная схема системы / Structural scheme of the system

Для 1-го и 3-го участков

$$R_i(x_i) = 1 - (1 - r_i)^{x_i + 1},$$

для 2-го и 4-го участков

$$R_i(x_i) = e^{-\lambda_i t} \sum_{j=0}^{x_i} \frac{(\lambda_i t)^j}{j!}$$

и для 5-го участка

$$R_5(x_5) = \sum_{j=3}^{3+x_5} C_{3+x_5}^{j} r_5^j q_5^{3+x_5-j}. \tag{3}$$

где $q = 1 - r$.

В последнем случае говорят о скользящем резерве. Если система управления содержит несколько скользящих блоков, то вероятность ее безотказной работы равна произведению вероятности каждого блока. Задачи с функциями вида (3) сложны для решения и для них пока не предложены методы оптимизации. Поэтому решение задачи оптимального резервирование со скользящим резервом обычно решается простым перебором. Это возможно только для простых систем управления.

Для некоторых систем управления важным является также их вес. Тогда ограничения задачи (2) дополняются ограничением на вес

$$\min\{C(x) \mid R(x) \ge R_0, W(x) \le W_0, x \ge 1, x \in N\},$$

где $W(x)$ – вес системы управления.

Покажем, что функции $R_i(x_i)$, которые содержат переменную в знаке суммирования могут быть преобразованы к виду удобному для использования методов оптимизации.

Выражение

$$\sum_{i=1}^{x} q_i$$

может быть записано в виде

$$q_1 y_1 + (q_1 + q_2) y_2 + \ldots + (q_1 + \ldots + q_m) y_m,$$
$$\sum_{i=1}^{m} y_i = 1,$$
$$y = 0 \vee 1,$$

где m $(x \le m)$ – максимально возможное число резервных элементов подсистемы. Это преобразование рекомендуется использовать, если число скользящих резервов в системе больше одного. Такое преобразование увеличивает размерность задачи оптимального резервирования и добавляет к целочисленным переменным x еще булевые переменные y.

Зная вероятности безотказной работы каждой подсистемы легко определяем вероятности безотказной работы всей системы по формуле

 ISSN 2415-7031

$$R(x) = \prod_{i=1}^{n} R_i(x_i),$$

где n – число основных элементов системы.

С учетом проведенных преобразований вероятность безотказной роботы со скользящим резервом будет иметь вид

$$R(x,y) = \prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} C_{x_i}^{j} r_i^{x_i+1}(1-r_i)^{x_i-1} y_j .$$

Далее рассмотрим метод решения задачи оптимального резервирования систем управления со скользящим резервом.

Метод точной квадратичной регуляризации (EQR) [1]

Этим методом задача (2) преобразуется к виду:

$$\max\{\|z\|^2 \,|\, C(x) + s + (r-1)\|z\|^2 - C_0 \le d,$$
$$-R(x,y) + R_0 + r\|z\|^2 \le d,$$
$$\sum_{i=1}^{m} y_i = 1,$$
$$x \ge 1,$$
$$x \in N,$$
$$y = 0 \vee 1\}, \tag{4}$$

где

$$z = (x, x_{n+1}).$$

Задача (4) содержит новую переменную d и два параметра s, r. Эта задача дискретная, так как переменные могут принимать только целочисленные и булевые значения, поэтому преобразуем ее к задаче с вещественными переменными

$$\max\{\|z\|^2 \,|\, C(x) + s + (r-1)\|z\|^2 - C_0 \le d,$$
$$-R(x,y) + R_0 + r\|z\|^2 \le d,$$
$$\sum_{i=1}^{m} y_i = 1,$$
$$x \ge 1,$$
$$\sum_{i=1}^{n}(1 - \cos(2\pi x_i)) + r\|z\|^2 \le d,$$
$$\sum_{i=1}^{m} y_i(1 - y_i) + r\|z\|^2 \le d,$$
$$0 \le y \le 1\}. \tag{5}$$

Ограничению

$$\sum_{i=1}^{n}(1 - \cos(2\pi x_i)) \le 0 \tag{6}$$

удовлетворяют только целые значения, а ограничениям

$$\sum_{i=1}^{m} y_i(1 - y_i) \le 0,$$
$$0 \le y \le 1 \tag{7}$$

только булевые переменные.

Ограничения (6)-(7) являются невыпуклыми, но после добавления квадратичного слагаемого $r\|z\|^2$ они становятся выпуклыми при $r \ge 40$.

Параметр s определяем из неравенства

$$s \ge \|x^*\|^2 - C(x^*),$$

где x^* − решение задачи (2).

В задаче (5) необходимо найти минимальное значение d, для которого выполняется условие

$$r\sum_{i=1}^{n+1} z_i^2 = d. \tag{8}$$

Это значение d легко найти методом дихотомии, изменяя значение d с определенным шагом и решая для каждого фиксированного значения d задачу (5) прямо-двойственным методом внутренней точки [8]. При увеличении d левая часть выражения (8) будет монотонно возрастать до достижения равенства.

В качестве начального значения для d берем решение следующей выпуклой задачи

$$\max\{d \,|\, C(x) + s + (r-1)\|z\|^2 - C_0 \le d,$$
$$-R(x,y) + R_0 + r\|z\|^2 \le d,$$
$$\sum_{i=1}^{m} y_i = 1,$$
$$x \ge 1,$$
$$\sum_{i=1}^{n}(1 - \cos(2\pi x_i)) + r\|z\|^2 \le d,$$
$$\sum_{i=1}^{m} y_i(1 - y_i) + r\|z\|^2 \le d,$$
$$0 \le y \le 1\}. \tag{9}$$

Предлагается следующий алгоритм для решения задачи (2) после приведенных выше преобразований при условии, что функции вероятности безотказной работы имеют вид (3).

Алгоритм

Шаг 1. Решаем выпуклую задачу (9), используя надстройку Excel-10 «Поиск решений» и находим минимальное значение d_0. Полученные при этом значения переменных (векторов) x и y используем для решения следующей задачи.

Шаг 2. Увеличиваем значение d, полагая $d = d_0 + h$ и решаем задачу (5) тем же поиском решений. Этот процесс изменения d и решение задачи (5) продолжается до тех пор, пока значение $r\|z\|^2 - d \approx 0$.

Шаг 3. Решаем задачу (2) при найденных переменных x и y.

Значение величины шага h в алгоритме меняется от итерации к итерации. Этот шаг выбирается таким, чтобы значение целевой функции задачи (2) убывало. Одновременно с изменением значения d рекомендуется увеличивать значение переменной x_{n+1}.

Проведены численные эксперименты с числом основных элементов системы до 100. Эти эксперименты показали лучшие решения по сравнению с эволюционным методом, реализованным также в надстройке Excel-10 «Поиск решений». Очень часто эволюционный поиск не позволял найти даже допустимое решение.

Надстройка «Поиск решений» позволяет решать задачи с максимальным числом переменных 200 и числом ограничений 100. Задачи, содержащие дискретные переменные эта настройка позволяет находить оптимальное решение только для числа переменных не больше 20. Эти ограничения вынудили авторов написать программу локального поиска, реализующую прямо-двойственный метод внутренней точки. В этом методе на каждой итерации решается линейная система уравнений.

Запишем задачу оптимизации в виде

$$\min\{f_0(x)-\mu\sum_{i=1}^{p}\ln(z_i)\mid f_i(x)+z_i=0,\ i=1,\ldots,p\},$$

тогда для этой задачи линейная система уравнений будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} G(x,y) & A^T(x) & 0 \\ A(x) & 0 & I \\ 0 & Z & Y \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\nabla f_0(x)-A^T(x)y\\ -f(x)-z\\ \mu e-ZYe\end{bmatrix}, \quad (10)$$

где $G(x,y)$ – гессиан функции Лагранжа задачи (10) (матрица вторых частных производных); $A(x)=\nabla f(x)$;(матрица первых производных, строка которой являются градиенты функций ограничений), I – единичная матрица;

$e=(1,\ldots,1)$;

$Y=diag(y_1,\ldots,y_p)$;

$f(x)=(f_1(x),\ldots,f_p(x))$;

$Z=diag(z_1,\ldots,z_p)$.

Решение линейной системы (10) используем для перехода в следующую точку

$$x^{k+1}=x^k+\alpha_k\Delta x^k,$$

$$y^{k+1}=y^k+\alpha_k\Delta y^k,$$

$$z^{k+1}=z^k+\alpha_k\Delta z^k.$$

Здесь x^k – переменные исходной задачи, y^k – двойственные переменные, z^k – свободные переменные. На каждой итерации значение параметра μ убывает по формуле $\mu=x^Tz/n$. Параметр α выбирается так, чтобы $z^{k+1}\geq 0$.

Для решения линейных систем вида (10) разработано много эффективных методов. Поэтому прямо-двойственный метод является эффективным при нахождении локальных решений в оптимизационных задачах.

Научная новизна и практическая значимость

Впервые для решения сложных задач оптимального резервирования систем управления использован новый метод точной квадратичной регуляризации. Для его использования исходная дискретная задача была преобразована к непрерывной, а затем использована точная квадратичная регуляризация упрощающая решение задачи. Новый метод позволил строить системы управления со скользящим резервом с большим числом элементов и сложными взаимосвязями между ними, что позволит проектировать такие системы с максимальной надежностью безотказной работы.

Более детальная информация о новом методе содержится в работе [1].

Выводы

В данной работе для решения класса задач оптимального резервирования систем управления со скользящим ресурсом использован новый метод точной квадратичной регуляризации.

Сравнительные численные эксперименты показали преимущество нового метода над существующими методами решения задач оптимального резервирования.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Косолап, А. И. Глобальная оптимизация. Метод точной квадратичной регуляризации / А. И. Косолап – Днепропетровск: ПГАСА, 2015 – 164 с.
2. Львович, Я.Е. Генетический алгоритм решения многокритериальной задачи повышения надежности резервирования / Я.Е. Львович, И.Л. Каширина, А.А. Тузиков // Информационные технологии. – 2012. – № 6. – С. 56–60.
3. Норкин, В. И. Оптимизация надежности сложной системы стохастическим методом ветвей и границ / В. И. Норкин, Б. О. Онищенко // Кибернетика и системный анализ. – 2008. − №3. – С. 129-141.
4. Ушаков, И. А. Курс теории надежности систем: учеб. пособие для вузов / И. А. Ушаков. – М.: Дрофа, 2008. – 239 с.
5. Шкляр, В. Н. Надежность системы управления: учеб. пособие / В. Н. Шкляр. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011. – 126 с.
6. Birolini, A. Reliability Engineering: Theory and Practice /A. Birolini.- Springer, 2014.- 630 p.

7. New Computational Methods in Power System Reliability/Editor D. Elmakias.- Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008.- 419 p.
8. Nocedal, J. Numerical optimization / J. Nocedal, S. J. Wright. – Springer, 2006. – 685 p.

REFERENCES

1. Kosolap A.I. *Globalnaya optimizatsiya. Metod tochnoy kvadratichnoy regulyarizatsyi* [Global optimization. A method of exact quadratic regularization]. Dnepropetrovsk, Prydniprovska gosudarstvenaya akademiya stroitelstva i arkhitektury, 2015. 164 p. (in Russian).
2. Lvovich Ja.E., Kashirina I.L and Tuzikov A.A. *Geneticheskiy algoritm resheniya mnogokriterialnoy zadachi povysheniya nadezhnosti rezervirovaniya* [Genetic algorithm of the solution multicriteria problems of increase of reliability of reservation] *Informatsionnye tekhnologii* – [Information technologies], 2012, no. 6, pp. 56-60. (in Russian).
3. Norkin V.I. and Onishchenko B. O. *Optimizatsiya nadezhnosti slozhnoy sistemy stokhasticheskim metodom vetvey i granits* [Optimization of reliability of a complex system of stochastic method of branches and borders] *Kibernetika i sistemnyy analiz* – [*Cybernetics and Systems Analysis*], 2008, no. 3, pp. 129-141. (in Russian).
4. Ushakov I.A. *Kurs teorii nadezhnosti sistem: uchebnoe posobie dlya vuzov* [Course of the theory of reliability of systems: Textbook for High Schools] Moscow, Drofa Publ., 2008, 239 p. (in Russian).
5. Shklyar V.N. *Nadezhnost sistemy upravleniya: uchebnoe posobie* [The reliability of the control system: schoolbook] Tomsk, Izdatelstvo Tomskogo politekhnicheskogo universiteta, 2011. 126 p. (in Russian).
6. Birolini A. Reliability Engineering: Theory and Practice. Springer, 2014, 630 p.
7. New Computational Methods in Power System Reliability. Editor Elmakias D. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2008. 419 p.
8. Nocedal J.and Wright S. J. Numerical optimization. Springer, 2006, 685 p.